Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

73. BAND, 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 11. MÄRZ 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

73. Band **Inhalt** 2. Heft

Seite

Degen, W., Über geschlossene Laplace-Ketten ungerader Periodenzahl 95

Stephanidis, N. K., Über eine Klasse von Strahlensystemen 121

Dekker, J. C. E., and J. Myhill, The Divisibility of Isols by Powers of Primes . . 127

MacHenry, T., The tensor product and the 2nd nilpotent product of groups . . . 134

Wielandt, H., Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe 146

Remmert, R., und K. Stein, Eigentliche holomorphe Abbildungen 159

Carleson, L., A representation formula for the Dirichlet integral 190

Unveränderter Nachdruck 1974

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

DEGEN, W.
Math. Zeitschr. 73, 95–120 (1960)

Über geschlossene Laplace-Ketten ungerader Periodenzahl

Von

WENDELIN DEGEN

Ausgehend von der Frage nach der Existenz geschlossener Laplace-Ketten ungerader Periodenzahl[1]) wurden zunächst die Laplace-Ketten der Periode fünf im projektiven dreidimensionalen Raum untersucht[2]). Hier zeigte sich eine auffallende Sonderklasse, deren Ketten etwa dadurch charakterisiert sind, daß die Verbindungskongruenzen der konjugierten Netze sämtlich W-Strahlsysteme sind. Man nennt sie R-Ketten.

Inzwischen wurde von M. BARNER[3]) die Existenz geschlossener Laplace-Ketten mit beliebiger Periodenzahl nachgewiesen und ein Analogon der R-Ketten gefunden, sobald die Periodenzahl ungerade und die Raumdimension um zwei kleiner ist (wie im Falle der Laplace-Ketten der Periode fünf im R_3).

In der vorliegenden Arbeit wird nun nach einer kurzen Zusammenstellung der Formeln von BARNER für allgemeine Laplace-Ketten (Abschnitt 1) und unserer früheren Ergebnisse über die gewöhnlichen R-Ketten der Periode fünf im R_3 (Abschnitt 2) die bislang nur für gewisse niedrige Periodenzahlen bestätigte Vermutung von BARNER[4]), daß nämlich bei den Analoga der R-Ketten die der einen Asymptotenlinienschar analogen Kurven in gewissen r-dimensionalen linearen Unterräumen ($n = 2r + 1$) liegen, für allgemeines n bewiesen (Abschnitt 3).

Der Beweis gelingt unter konsequenter Beachtung des Dualitätsprinzips und des durch die lokale $(n+2)$-Eck-Figur ausgezeichneten Nullsystems (s. Abschnitt 1) dadurch, daß eine projektive Bewegung betrachtet wird, der die erwähnten Kurven als spezielle Bahnkurven angehören. Den Hauptinhalt dieses Satzes, nämlich, daß die Dimension der betrachteten Kurven nicht größer als r ist, erhält man sogar für alle Bahnkurven, nicht nur für solche, die auf einer Netzfläche liegen. Darüber hinaus ergibt sich, daß diejenigen Bahnkurven, die tatsächlich die volle Dimension r haben, untereinander alle projektiv äquivalent sind.

Hieran anknüpfend werden zunächst unabhängig von den R-Ketten projektive Bewegungen des $(2r+1)$-dimensionalen projektiven Raumes betrachtet; insbesondere solche, die den dreidimensionalen projektiven Schiebungen

[1]) Die Anregung hierzu gab Herr Prof. Dr. G. BOL als Thema für meine Staatsexamensarbeit. Vgl. [6] (Literaturverzeichnis am Schluß).

[2]) Man findet dies in den Arbeiten [6] und [7] (unveröffentlicht); in Abschnitt 2 der vorliegenden Arbeit wird eine kurze Zusammenfassung gegeben.

[3]) Vgl. [1].

[4]) Vgl. [1], S. 376.

völlig entsprechen und die wir deshalb mit dem gleichen Namen belegen. Es zeigt sich, daß für eine spezielle Klasse solcher Schiebungen — die jedoch die bei den R-Ketten auftretenden noch umfaßt — der Dimensionssatz (s. o.) in einer modifizierten Form gültig ist.

Mit einer Schiebung ist ebenso wie mit einer Laplace-Kette an jeder Stelle ein Nullsystem ausgezeichnet [es kommt nur auf die lokale $(n+2)$-Eck-Figur an]. Dies führt zu einer Kennzeichnung der R-Ketten: Es sind die einzigen Laplace-Ketten mit der Eigenschaft, daß die Nullsysteme (d. h. die ihnen im zugehörigen Geradenraum beigeordneten Hyperebenen) nur eine *einparametrige* Gesamtheit durchlaufen.

Bei der Untersuchung dieser einparametrigen Hyperebenenschar des zugehörigen Geradenraumes spielt derjenige lineare Unterraum, der von den Bildpunkten sämtlicher Bahntangenten aufgespannt wird, eine besondere Rolle: Er ist im Durchschnitt aller jener Hyperebenen enthalten und bei den R-Ketten bezüglich beider Parameter fest.

1. Wir betrachten $n+2$ Flächen in einem n-dimensionalen projektiven Raum; sie mögen durch die Vektoren

$$\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1} \tag{1.1}$$

beschrieben werden. Sie seien in zyklischer Reihenfolge[5]) geordnet und durch gleiche Parameterwerte u, v punktweise aufeinander bezogen. Wir setzen voraus, daß sie an jeder Stelle u, v den ganzen R_n aufspannen, dann besteht genau *eine* lineare Abhängigkeit, und man verwendet diese, um die Normierung der Vektoren (1) bis auf einen gemeinsamen Faktor so festzulegen, daß sie die Gestalt

$$\sum_{i=0}^{n+1} \mathfrak{x}_i = 0 \tag{1.2}$$

annimmt.

Die Flächen $\mathfrak{x}_i$ sind genau dann die Netzflächen einer geschlossenen Laplace-Kette, wenn 1. für jedes i die Seitenkongruenz $(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1})$ die Flächen $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{x}_{i+1}$ als Brennflächen besitzt und wenn 2. die Torsallinien aller dieser Kongruenzen sich entsprechen.

Analytisch bedeutet die erste Bedingung, daß Ableitungsgleichungen der Form

$$d\mathfrak{x}_i = \alpha_i \mathfrak{x}_{i-1} + \omega_i \mathfrak{x}_i + \beta_i \mathfrak{x}_{i+1} \text{ [6])} \tag{1.3}$$

bestehen, und die zweite verlangt

$$\alpha_i \wedge \alpha_k = 0, \quad \beta_i \wedge \beta_k = 0 \qquad (i, k = 0, \ldots, n+1). \tag{1.4}$$

[5]) Wir verwenden die schon mehrfach bewährte zyklisch symmetrische Behandlungsmethode (vgl. [1], [3]). Hier soll jede mit einem Index i versehene Gleichung für jedes $i = 0, 1, \ldots, n+1$ gelten, wobei modulo $n+2$ zu rechnen ist. Summierungen werden ebenfalls reihum über alle diese Indizes durchgeführt.

[6]) „d" bedeutet das äußere Differential; Pfaffsche Formen (und nur sie) werden mit griechischen Buchstaben geschrieben.

Ist nur die erste dieser Bedingungen erfüllt, so spricht man (in Verallgemeinerung der üblichen T-Figuren, wo vier Flächen des R_3 diese Eigenschaft haben) von T_{n+2}-Figuren[7]).

Wir haben nun das System (2), (3), (4) auszuwerten. Durch Ableiten folgt zunächst aus (2), daß die Koeffizienten der entstehenden Summe alle einander gleich sind:

$$\alpha_{i+1} + \omega_i + \beta_{i-1} = \varphi \quad (\varphi \text{ unabhängig von } i). \tag{1.5}$$

Hiernach können wir die Formen ω_i in (3) ersetzen. Die noch verbleibenden Formen $\alpha_i, \beta_i, \varphi$ genügen — wie aus den Integrierbarkeitsbedingungen $\hat{d}(d\mathfrak{x}_i) = 0$ folgt — den Gleichungen

$$d\alpha_i = \alpha_i \wedge (\beta_{i-1} - \beta_{i-2}), \tag{1.6}$$

$$d\beta_i = \beta_i \wedge (\alpha_{i+1} - \alpha_{i+2}), \tag{1.7}$$

$$d\varphi = 0 \tag{1.8}$$

Hier ermöglicht uns die letzte Beziehung, eine Umnormung

$$\mathfrak{x}_i^* = f\mathfrak{x}_i \tag{1.9}$$

mit

$$d(\log f) + \varphi = 0 \tag{1.10}$$

vorzunehmen; sie ist bis auf einen konstanten Faktor festgelegt und erhält (2). Man erreicht durch die Festsetzung (10), daß $\varphi^* = 0$ wird. Wir lassen die Sterne gleich wieder weg und schreiben

$$d\mathfrak{x}_i = \alpha_i \mathfrak{x}_{i-1} - (\alpha_{i+1} + \beta_{i-1})\,\mathfrak{x}_i + \beta_i \mathfrak{x}_{i+1}. \tag{1.11}$$

Wir fassen zusammen: *Wählt man die Formen α_i, β_i gemäß* (4), (6), (7), *so stellen die Lösungen von* (11), (2) *eine bis auf Projektivitäten eindeutig bestimmte geschlossene Laplace-Kette der Periode $n+2$ des n-dimensionalen projektiven Raumes dar, und jede solche Laplace-Kette ist Lösung eines derartigen Systems.*

Wir gehen zu speziellen Parametern u, v über und wählen das auf allen Flächen sich entsprechende konjugierte Netz als Parameternetz; oder, analytisch ausgedrückt, wir setzen

$$\alpha_i = a_i\,du, \qquad \beta_i = b_i\,dv, \tag{1.12}$$

was nach (4) möglich ist. Bei willkürlicher Parameterverteilung auf den Netzkurven gelten neben dann (2) die Ableitungsgleichungen

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_{iu} = a_i \mathfrak{x}_{i-1} - a_{i+1}\mathfrak{x}_i, \\ \mathfrak{x}_{iv} = b_i \mathfrak{x}_{i+1} - b_{i-1}\mathfrak{x}_i, \end{cases} \tag{1.13}$$

[7]) Unter gewissen Zusatzvoraussetzungen folgt die zweite Bedingung aus der ersten, so daß für $n > 5$ jede T_n-Figur schon Laplace-Kette ist. Wir werden auf die verbleibenden T_5-Figuren noch zurückkommen.

und die Integrierbarkeitsbedingungen

$$\begin{cases} a_{iv} = a_i(b_{i-2} - b_{i-1}), \\ b_{iu} = b_i(a_{i+2} - a_{i+1}). \end{cases} \tag{1.14}$$

Wir setzen nun voraus, daß n ungerade ist, es sei also

$$n = 2r + 1. \tag{1.15}$$

Es spannen je $2r+1$ aufeinanderfolgende Vektoren der Laplace-Kette Hyperebenen auf. Wir setzen

$$\mathfrak{Y}_i = (\mathfrak{x}_{i-r}, \ldots, \mathfrak{x}_i, \ldots, \mathfrak{x}_{i+r}), \tag{1.16}$$

dann folgen aus (11) die Ableitungsgleichungen

$$d\mathfrak{Y}_i = -(\beta_{i+r}\mathfrak{Y}_{i-1} - [\beta_{i+r+1} + \alpha_{i-r-1}]\mathfrak{Y}_i + \alpha_{i-r}\mathfrak{Y}_{i+1}) - \sum_{k=0}^{n+1}(\alpha_k + \beta_k)\mathfrak{Y}_i. \tag{1.17}$$

Nun findet man aber mittels (6) und (7)

$$d\sum_{k=0}^{n+1}(\alpha_k + \beta_k) = 0 \tag{1.18}$$

so daß eine Umnormung

$$\mathfrak{X}_i = g\,\mathfrak{Y}_i \tag{1.19}$$

mit

$$d(\log g) - \sum_{k=0}^{n+1}(\alpha_k + \beta_k) = 0 \tag{1.20}$$

möglich ist. Die neuen Vektoren $\mathfrak{X}_i$ genügen den Gleichungen

$$d\mathfrak{X}_i = -\beta_{i+r}\mathfrak{X}_{i-1} + (\beta_{i+r+1} + \alpha_{i-r-1})\mathfrak{X}_i - \alpha_{i-r}\mathfrak{X}_{i+1}. \tag{1.21}$$

Sie sind, ebenso wie die $\mathfrak{Y}_i$, linear abhängig; aus (2) folgt sofort

$$\sum_{k=0}^{n+1}\mathfrak{X}_k = 0. \tag{1.22}$$

Wir stellen fest: *Die Ebenenvektoren $\mathfrak{X}_i$ genügen ebenfalls Laplaceschen Ableitungsgleichungen. Die Gesamtheit der Laplace-Ketten ist selbstdual.*

Der Übergang von Punkt- zu Ebenenvektoren wird durch das involutorische Schema

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{x}_i & \alpha_i & u \\ \mathfrak{X}_i & -\beta_{i+r} & v \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

vermittelt. Bezüglich der Inzidenz gilt die folgende Produkttabelle:

$$\begin{array}{c|c} & \mathfrak{X}_{i-r-1}\,\mathfrak{X}_{i-r}\ldots\mathfrak{X}_i\ldots\mathfrak{X}_{i+r}\,\mathfrak{X}_{i+r+1} \\ \hline \mathfrak{x}_i & -e \quad 0 \quad \ldots 0 \ldots \quad 0 \quad +e \end{array} \qquad (e = \text{const} \neq 0). \tag{1.24}$$

Die Konstanz von e folgt aus (2) und (21). Da die Produkttabelle (24) schiefsymmetrisch ist, ist die Korrelation, die jedem Punkt

$$\mathfrak{p} = \sum_{k=0}^{n+1} p_k \mathfrak{x}_k \tag{1.25}$$

die Ebene

$$\mathfrak{P} = \sum_{k=0}^{n+1} p_k \mathfrak{X}_k \quad \text{(mit denselben } p_k\text{)} \tag{1.26}$$

zuordnet, ein Nullsystem[8]). Geometrisch ist dieses Nullsystem dadurch charakterisiert, daß es jeden Punkt $\mathfrak{x}_i$ auf die Hyperebene abbildet, die von den Eckpunkten des lokalen $(n+2)$-Ecks jedoch mit Ausnahme der beiden gegenüberliegenden aufgespannt wird. Im folgenden wird dieses *ausgezeichnete Nullsystem* eine entscheidende Rolle spielen.

2. Wir gehen nun speziell zu den Laplace-Ketten der Periode fünf ($n=3$, $r=1$) über. Die Netzflächen besitzen hier Asymptotenlinien, und wir können uns fragen: Gibt es Laplace-Ketten, bei denen sich die Asymptotenlinien auf allen Netzflächen entsprechen? Die Verbindungskongruenzen benachbarter Flächen sind dann W-Strahlsysteme und jede Fläche besitzt zwei zueinander konjugierte W-Berührkongruenzen. Die Flächen sind daher projektiv abwickelbar und werden R-Flächen genannt. Dementsprechend heißen die Ketten R-Ketten[9]).

Die Asymptotenlinien der Flächen $\mathfrak{x}_i$ sind durch

$$\alpha_i \alpha_{i-1} - \beta_i \beta_{i+1} = 0 \tag{2.1}$$

gegeben. Sie entsprechen sich, wenn

$$\frac{a_i a_{i-1}}{b_i b_{i+1}} = \bar{q} \quad (\bar{q} \text{ unabhängig von } i) \tag{2.2}$$

gilt. Hieraus folgt zunächst durch Multiplikation sämtlicher Gleichungen, daß $\bar{q}$ positiv ist. Weiter erhält man

$$a_i = q\, b_{i+1} \quad \text{mit} \quad q = \sqrt{\bar{q}}\,. \tag{2.3}$$

Nun war die Parameterverteilung noch willkürlich; bei einer Transformation

$$\frac{du^*}{du} = U(u) \neq 0, \qquad \frac{dv^*}{dv} = V(v) \neq 0 \tag{2.4}$$

gilt

$$a_i^* = a_i\, U^{-1}, \qquad b_i^* = b_i\, V^{-1}. \tag{2.5}$$

Wir versuchen

$$a_i^* = b_{i+1}^* \tag{2.6}$$

[8]) Daß in den Darstellungen (25) bzw. (26) überzählige Koordinaten stehen, stört nicht, denn die ganze Klasse äquivalenter Darstellungen für Punkte wird auf die ganze Klasse der Ebenendarstellungen abgebildet, weil für die Ebenenvektoren die Abhängigkeit (22) dieselbe Form hat wie (2) für die Punktvektoren.

[9]) Man vgl. [4] II, § 116 und 119.

zu erreichen; dazu ist

$$q = \frac{U}{V} \tag{2.7}$$

notwendig. Nun folgt aber mittels (3) aus (1.14)

$$(\log q)_{uv} = 0 \tag{2.8}$$

und diese Gleichung besagt, daß sich q in der Form (7) darstellen läßt. Wir denken uns die Parameter u, v so eingerichtet und lassen die Sterne wieder weg. Es gilt also jetzt

$$a_i = b_{i+1} \quad (= c_i). \tag{2.9}$$

Wir bezeichnen diese Größen mit c_i, um daran erinnert zu sein, daß es sich um die Sonderklasse der R-Ketten handelt. Die Bedingungen (1.14) schreiben sich jetzt so:

$$\begin{cases} c_{iu} = c_i(c_{i-2} - c_{i+2}), \\ c_{iv} = c_i(c_{i+2} - c_{i-2}), \end{cases} \tag{2.10}$$

und die Ableitungsgleichungen lauten

$$\begin{cases} \mathfrak{x}_{iu} = c_i \mathfrak{x}_{i-1} - c_{i+1}\mathfrak{x}_i, \\ \mathfrak{x}_{iv} = c_{i-1}\mathfrak{x}_{i+1} - c_{i-2}\mathfrak{x}_i. \end{cases} \tag{2.11}$$

Die Gl. (1) der Asymptotenlinien nimmt die Form

$$du^2 - dv^2 = 0 \tag{2.12}$$

an, so daß wir durch

$$2s = u + v, \quad 2t = u - v \tag{2.13}$$

Asymptotenlinienparameter einführen können. In diesen Parametern lautet das System (10), (11):

$$c_{is} = 0, \tag{2.14}$$

$$c_{it} = 2c_i(c_{i-2} - c_{i+2}), \tag{2.15}$$

$$\mathfrak{x}_{is} = c_i \mathfrak{x}_{i-1} - (c_{i+1} + c_{i-2})\mathfrak{x}_i + c_{i-1}\mathfrak{x}_{i+1}, \tag{2.16}$$

$$\mathfrak{x}_{it} = c_i \mathfrak{x}_{i-1} - (c_{i+1} - c_{i-2})\mathfrak{x}_i - c_{i-1}\mathfrak{x}_{i+1}. \tag{2.17}$$

Wir wenden uns der geometrischen Interpretation dieser Gleichungen zu. Leitet man (16) bzw. (17) fortgesetzt ab, so erhält man die Grundgleichungen der s- bzw. der t-Kurven. Man sieht, daß als Koeffizienten gewisse Polynome in den c_i auftreten, und diese sind wegen (14) von s unabhängig. Das heißt: *Die s-Kurven sind W-Kurven. Die t-Kurven sind auf jeder Fläche projektiv äquivalent und werden durch die s-Kurven projektiv aufeinander abgebildet.*

Genauer ergibt sich bei den s-Kurven

$$\mathfrak{x}_{iss} + A\,\mathfrak{x}_{is} + B\,\mathfrak{x}_i = 0 \quad \text{mit} \quad A = \sum_{k=0}^{n+1} c_k, \quad B = \sum_{k=0}^{n+1} c_k c_{k+1}. \tag{2.18}$$

Also: *Die s-„Kurven" sind Geraden, die Flächen* $\mathfrak{x}_i(s,t)$ *somit Regelflächen.* Wir sprechen statt von *s*-Kurven jetzt besser von Erzeugenden. Als Geraden sind die *s*-Kurven trivialerweise projektiv äquivalent. Man findet aber zusätzlich, daß nach (15) die Koeffizienten A und B auch von t unabhängig sind. *Also ist die Verteilung des Parameters s auf sämtlichen vorkommenden Erzeugenden projektiv äquivalent.*

Betrachten wir die R-Ketten auch im Geradenraum! Als Basis verwenden wir die Bildpunkte $\mathfrak{a}_i$ der „Seiten" $(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1})$. Sie spannen eine Hyperebene auf; der von ihnen definierte lineare Geradenkomplex heißt *Seitenkomplex* und das zugehörige Nullsystem ist das im ersten Abschnitt hervorgehobene ausgezeichnete. Als sechsten Basispunkt nehmen wir den zu dieser Hyperebene bezüglich der Kleinschen Quadrik polaren Punkt $\mathfrak{k}$, der kurz der Pol des Seitenkomplexes genannt werde.

Wir können die Normierung von $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{k}$ so festlegen[10]), daß für das Polarprodukt bezüglich der Kleinschen Quadrik die Tabelle

(2.19)

○	$\mathfrak{a}_0$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{k}$	
$\mathfrak{a}_0$			e	e			
$\mathfrak{a}_1$				e	e		(e = const, an den übrigen
$\mathfrak{a}_2$	e				e		Stellen stehen Nullen)
$\mathfrak{a}_3$	e	e					
$\mathfrak{a}_4$		e	e				
$\mathfrak{k}$						$-2e$	

gilt. Die Ableitungsgleichungen für diese Vektoren folgen aus (16), (17):

$$\mathfrak{a}_{i\,s} = c_i\,\mathfrak{k}, \tag{2.20}$$

$$\mathfrak{a}_{i\,t} = c_i\,[\mathfrak{a}_{i+1} - \mathfrak{a}_{i+2} + \mathfrak{a}_{i-2} - \mathfrak{a}_{i-1}] + (c_{i-1} + c_{i-2} - c_{i+1} - c_{i+2})\,\mathfrak{a}_i, \tag{2.21}$$

$$\mathfrak{k}_s = \sum_{i=0}^{n+1} A_i\,\mathfrak{a}_i \quad \text{mit} \quad A_i = c_i - c_{i+1} + c_{i+2} + c_{i-2} - c_{i-1}, \tag{2.22}$$

$$\mathfrak{k}_t = 0. \tag{2.23}$$

Die letzte dieser Gleichungen besagt: *Der Seitenkomplex ist einparametrig und längs der t-Kurven fest.* Nun gehören aber die Tangenten an die t-Kurven für jeden Wert des Parameters diesem Komplex an, *also sind die t-Kurven Komplexkurven.*

Weiter ist nach (20), (22) wegen (14)

$$\mathfrak{k}_{ss} = \Big(\sum_{k=0}^{n+1} A_k\,c_k\Big)\,\mathfrak{k}, \tag{2.24}$$

und das heißt: *Die Polkurve des Seitenkomplexes beschreibt im Geradenraum eine Gerade.* Die Figur enthält somit eine ausgezeichnete feste lineare Kongruenz, nämlich diejenige, die zum Polarraum dieser Geraden gehört. Sie ist

[10]) Man setzt $\mathfrak{a}_i = a\,(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1})$ bzw. $\mathfrak{k} = a\,\{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_4)\}$ und erreicht durch geeignete Wahl von a (für alle $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{k}$ gemeinsam), daß die angegebene Produkttabelle gilt.

daher im Seitenkomplex enthalten. Andererseits spannen die Bilder von fünf entsprechenden Erzeugenden der Netzflächen im Geradenraum einen linearen Unterraum auf, der in der Hyperebene des Seitenkomplexes enthalten ist und beim Fortschreiten in s-Richtung festbleibt; folglich ist dieser zu $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{k}_s$ polar und daher mit der erwähnten Kongruenz identisch. Diese bleibt aber auch in t-Richtung fest. Wir haben also: *Die Netzflächen einer geschlossenen R-Kette der Periode fünf sind Kongruenzregelflächen einer gemeinsamen linearen Kongruenz.*

Die fünf entsprechenden Punkte $\mathfrak{x}_i$ erzeugen in Abhängigkeit von s eine projektive Bewegung, deren Bahnkurven durch

$$\mathfrak{y} = \sum_{i=0}^{4} p_i \mathfrak{x}_i \quad \text{mit } p_i = \text{const} \tag{2.25}$$

gegeben sind. Der Seitenkomplex ist ein im bewegten System fester linearer Komplex, dem die Tangenten an alle Bahnkurven angehören. Die Bewegung ist somit eine projektive Schiebung und hat, da die Polkurve eindimensional ist, speziellen Charakter; sie wird K_1-Schiebung genannt [11]. Wie man umgekehrt die geschlossenen R-Ketten aus einem geeigneten geschlossenen System von fünf asymptotisch transformierten Komplexkurven in einer K_1-Schiebung erzeugen kann, ist in anderem Zusammenhang in einer eigenen Arbeit dargestellt [12].

Unsere R-Ketten, die wir unter den Laplace-Ketten der Periode fünf dadurch charakterisiert hatten, daß alle Seitenkongruenzen W-Strahlsysteme sind, lassen sich auch auf manche andere Weise kennzeichnen.

Zunächst zeigen wir: *Beschreibt der Pol des Seitenkomplexes eine Kurve, so liegt bereits eine R-Kette vor* (wo diese „Kurve" eine Gerade ist).

Der Geradenvektor $\mathfrak{k}$ läßt sich in der Form

$$\mathfrak{k} = a\{(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) + (\mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_4)\} \text{ [13]} \tag{2.26}$$

darstellen, wobei a eine geeignete Normierungsfunktion bedeutet. Nach (1.11) folgt

$$\left\{\begin{aligned} d\mathfrak{k} \equiv f\{&[\alpha_2+\beta_3](\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_4) + [\alpha_1+\beta_2](\mathfrak{x}_3,\mathfrak{x}_4) + [\alpha_3+\beta_4](\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_2) - \\ &- [\alpha_1+\beta_2+\alpha_4+\beta_0](\mathfrak{x}_1,\mathfrak{x}_3) - [\alpha_1+\beta_2+\alpha_3+\beta_4](\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_3) - \\ &- [\alpha_0+\beta_1+\alpha_3+\beta_4](\mathfrak{x}_2,\mathfrak{x}_4)\} \pmod{\mathfrak{k}}. \end{aligned}\right. \tag{2.27}$$

[11]) Der Schiebungsbegriff wurde von M. BARNER [2] eingeführt. Die Schiebungen sind, da mit ihnen immer eine einparametrige Schar linearer Komplexe verbunden ist, mit den Raumkurven des Geradenraumes (die nicht auf der absoluten Quadrik liegen) äquivalent. Spezielle, sogenannte K_k-Schiebungen liegen vor, wenn die ihnen zugeordneten Raumkurven in linearen Unterräumen der Dimension k liegen.

[12]) Vgl. [3].

[13]) Die durch zyklisches Vertauschen der Indizes auf der rechten Seite erhaltenen Ausdrücke sind nach (1.2) mit dem angegebenen identisch, wie es den geometrischen Verhältnissen entspricht.

$\mathfrak{k}$ beschreibt eine Kurve, wenn es eine Richtung σ gibt (mit $\sigma \neq 0$), in welcher $\mathfrak{k}$ stationär ist:

$$d\mathfrak{k} \wedge \sigma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{k}}. \tag{2.28}$$

Hiernach ergibt sich aus (27), wenn zur Abkürzung

$$\alpha_i + \beta_{i+1} = \sigma_i \tag{2.29}$$

gesetzt wird

$$\begin{cases} (\sigma_1 + \sigma_4) \wedge \sigma = 0, \quad (\sigma_1 + \sigma_3) \wedge \sigma = 0, \quad (\sigma_0 + \sigma_3) \wedge \sigma = 0, \\ \sigma_1 \wedge \sigma = \sigma_2 \wedge \sigma = \sigma_3 \wedge \sigma, \end{cases} \tag{2.30}$$

woraus folgt, daß alle σ_i proportional sind. Wählt man die Funktion q so, daß die Nulllinien von σ durch

$$\frac{dv}{du} + q = 0 \tag{2.31}$$

beschrieben werden, so gilt (3), und diese Gleichungen waren für R-Ketten kennzeichnend.

Weitere Kennzeichnungen lassen sich mit Hilfe der Darboux-Invarianten gewinnen. Bilden die Parameterkurven auf einer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ ein konjugiertes Netz, so besteht eine Laplace-Gleichung

$$\mathfrak{x}_{uv} + a\,\mathfrak{x}_u + b\,\mathfrak{x}_v + c\,\mathfrak{x} = 0, \tag{2.32}$$

und man nennt die gegenüber Umnormungen des Vektors $\mathfrak{x}$ invarianten Größen

$$h = a_u + a\,b - c, \qquad k = b_v + a\,b - c \tag{2.33}$$

ihre Darboux-Invarianten. Da die beiden Laplace-transformierten Netze von $\mathfrak{x}$ je eine Invariante mit $\mathfrak{x}$ gemeinsam haben, ordnet man die Invarianten den Verbindungskongruenzen zu.

In unserm Fall der Laplace-Ketten der Periode fünf gehört zur Kongruenz $(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1})$ die Invariante

$$a_{i+1}\,b_i. \tag{2.34}$$

Nach Abschnitt 1 entspricht nun unserer Laplace-Kette eine duale Kette, und die Kongruenz $(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1})$ entspricht sich dabei selbst. Die duale Invariante ist nach (1.23)

$$b_{i+2}\,a_{i-1}. \tag{2.35}$$

Können diese beiden Invarianten für jede Kongruenz einander gleich sein? — Diese Frage ist sehr einfach zu beantworten. Aus der Gleichheit von (34) und (35) folgt sofort (3). Also: *Bei den R-Ketten der Periode fünf und nur bei diesen stimmt die Darboux-Invariante jeder Kongruenz mit ihrer dualen überein* [14].

[14]) Dies ist schon länger bekannt, denn durch die Gleichheit der Darboux-Invariante mit ihrer dualen sind die W-Strahlsysteme gekennzeichnet (vgl. [5], § 152, Aufgabe 5c). Wir haben diesen Satz nur deshalb angeführt, weil er zu einer Verallgemeinerung der R-Ketten für beliebige ungerade Dimensionen verwendet werden kann.

3. Wir gehen nun zu den Analoga der R-Ketten in Räumen beliebiger ungerader Dimension $n=2r+1$ über. Der Kürze wegen nennen wir sie ebenfalls R-Ketten. Abweichend von der Definition von M. BARNER [15]), die eine der ursprünglichen Kette K umbeschriebene Kette $\hat{K}$ benützt und die für R-Ketten die Gleichheit der Darboux-Invarianten von allen in beiden Ketten einander gegenüberliegenden Kongruenzen fordert, verwenden wir die hierzu gleichwertige: *Die Laplace-Ketten, bei denen für jede Seitenkongruenz die Darboux-Invariante mit ihrer dualen übereinstimmt, heißen R-Ketten.* Die Äquivalenz beider Definitionen folgt sofort daraus, daß die Darboux-Invariante der in der umbeschriebenen Kette gegenüberliegenden Kongruenz mit der dualen übereinstimmt.

Die Darboux-Invariante der Kongruenz $(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1})$ berechnet sich zu

$$a_{i+1}\, b_i, \tag{3.1}$$

und die hierzu duale findet man nach dem Schema (1.23):

$$b_{i+1+r}\, a_{i-r}. \tag{3.2}$$

Die Gleichungen

$$a_{i+1}\, b_i = a_{i-r}\, b_{i+1+r} \tag{3.3}$$

sind also die kennzeichnenden Bedingungen für R-Ketten. Sie haben die Lösungen

$$a_i = q\, b_{i+r}, \tag{3.4}$$

und q erfüllt, wie aus den Integrierbarkeitsbedingungen (1.14) folgt, die Gleichung

$$(\log q)^{\cdot}_{uv} = 0, \tag{3.5}$$

die wieder wie in Abschnitt 2 eine Parametertransformation ermöglicht, so daß

$$a_i^* = b_{i+r}^* = c_i \tag{3.6}$$

gilt. In gleicher Weise sind s- nnd t-Kurven ausgezeichnet, deren Parameter mit u^*, v^* nach (2.13) zusammenhängen. Für die Größen c_i ergibt sich

$$c_{is} = 0, \tag{3.7}$$

$$c_{it} = 2c_i(c_{i+r+2} - c_{i+r+1}), \tag{3.8}$$

und die Vektoren $\mathfrak{x}_i$ genügen den Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{x}_{is} = c_i\, \mathfrak{x}_{i-1} - (c_{i+1} + c_{i-r-1})\, \mathfrak{x}_i + c_{i-r}\, \mathfrak{x}_{i+1}, \tag{3.9}$$

$$\mathfrak{x}_{it} = c_i\, \mathfrak{x}_{i-1} - (c_{i+1} - c_{i-r-1})\, \mathfrak{x}_i - c_{i-r}\, \mathfrak{x}_{i+1}. \tag{3.10}$$

Diesen stellen wir noch die der Ebenenvektoren an die Seite

$$\mathfrak{X}_{is} = -\{c_i\, \mathfrak{X}_{i-1} - (c_{i+1} + c_{i-r-1})\, \mathfrak{X}_i + c_{i-r}\, \mathfrak{X}_{i+1}\}, \tag{3.11}$$

$$\mathfrak{X}_{it} = c_i\, \mathfrak{X}_{i-1} - (c_{i+1} - c_{i-r-1})\, \mathfrak{X}_i - c_{i-r}\, \mathfrak{X}_{i+1}. \tag{3.12}$$

[15]) Vgl. [1].

Sie unterscheiden sich also von denen der Punktvektoren *nur durch das Vorzeichen bei* (11).

Aus (7) folgt wieder wie aus (2.14): *Die s-Kurven sind W-Kurven. Die t-Kurven jeder Fläche sind untereinander projektiv äquivalent und werden durch die s-Kurven projektiv aufeinander abgebildet.*

Wir denken uns nun die $(n+2)$ zum gleichen Wert t_0 des Parameters t gehörenden s-Kurven

$$\mathfrak{x}_i(s, t_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1) \tag{3.13}$$

herausgegriffen und bemerken, daß sie eine projektive Bewegung — das ist eine einparametrige Schar von Projektivitäten — definieren. Bahnkurven in dieser Bewegung sind die Kurven

$$\mathfrak{y}(s) = \sum_k p_k \mathfrak{x}_k(s, t_0) \quad \text{mit } p_k = \text{const}. \tag{3.14}$$

Wir wollen zeigen, daß eine beliebige andere s-Kurve einer Netzfläche ebenfalls Bahnkurve dieser Bewegung ist, so daß jede Netzfläche aus einer einparametrigen Schar von Bahnkurven besteht.

Zum Beweis betrachten wir die Projektivität Π_1 aus unserer einparametrigen Schar, welche jeden Punkt $\mathfrak{x}_i(s_0, t_0)$ auf $\mathfrak{x}_i(s_1, t_0)$ abbildet; sie ist dadurch eindeutig bestimmt. Welches ist das Bild der durch $\mathfrak{x}_0(s_0, t_0)$ hindurchgehenden t-Kurve? Nach (10) und (8) sind die Ableitungen von $\mathfrak{x}_0(s_0, t)$ nach t an der Stelle $t = t_0$ Linearkombinationen aus $\mathfrak{x}_i(s_0, t_0)$ mit Koeffizienten, welche Polynome vom Grade der Ableitungsordnung in den Größen $c_i^0 = c_i(s_0, t_0)$ sind:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathfrak{x}_0(s_0, t)\Big|_{t=t_0} = \sum_i F_i^k(c_0^0, c_1^0, \ldots, c_{n+1}^0)\, \mathfrak{x}_i(s_0, t_0). \tag{3.15}$$

Bei der Projektivität Π_1 gehen sie in

$$\begin{cases} \Pi_1 \dfrac{\partial^k}{\partial t^k} \mathfrak{x}_0(s_0, t)\Big|_{t=t_0} = \displaystyle\sum_i F_i^k(c_0^0, \ldots, c_{n+1}^0)\, \Pi_1 \mathfrak{x}_i(s_0, t_0) \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_i F_i^k(c_0^0, \ldots, c_{n+1}^0)\, \mathfrak{x}_i(s_1, t_0) \end{cases} \tag{3.16}$$

über. Wichtig ist nun, daß wegen (7)

$$c_i(s_0, t_0) = c_i(s_1, t_0) \tag{3.17}$$

gilt, so daß man die letzte Summe in (3.16) zur t-Ableitung k-ter Ordnung von $\mathfrak{x}_0$ an der Stelle s_1, t_0 zusammenfassen kann:

$$\Pi_1 \frac{\partial^k}{\partial t^k} \mathfrak{x}_0(s_0, t)\Big|_{t=t_0} = \frac{\partial^k}{\partial t} \mathfrak{x}_0(s_1, t)\Big|_{t=t_0}. \tag{3.18}$$

Wir haben also, wenn wir (18) für $k = 1, 2, \ldots, n+1$ verwenden, zusammen mit $\Pi_1 \mathfrak{x}_0(s_0, t_0) = \mathfrak{x}_0(s_1, t_0)$ $(n+2)$ „aufeinanderfolgende" Punkte der beiden Kurven $\mathfrak{x}_0(s_0, t)$ und $\mathfrak{x}_0(s_1, t)$, die durch Π_1 ineinander übergeführt werden.

Da diese beiden Kurven auf Grund des letzten Satzes jedoch projektiv äquivalent sind, werden sie durch Π_1 ganz ineinander übergeführt, und zwar so, daß sich die Punkte mit gleichem Parameter t entsprechen.

Betrachtet man nun in gleicher Weise statt Π_1 die ganze Schar von Projektivitäten Π_s die durch

$$\Pi_s \mathfrak{x}_i(s_0, t_0) = \mathfrak{x}_i(s, t_0) \tag{3.19}$$

definiert ist, so folgt, daß die zu gleichen Parameterwerten t gehörigen s-Kurven der Fläche $\mathfrak{x}_0(s, t)$ Bahnkurven der Bewegung sind. Das gleiche gilt natürlich wegen der zyklischen Symmetrie auch für die s-Kurven der übrigen Flächen, womit die volle Behauptung bewiesen ist.

Eine ähnliche Überlegung, wie wir sie eben für die durch $\mathfrak{x}_s(s_0, t_0)$ hindurchgehenden t-Kurven angestellt haben, lehrt für die s-Kurven: Die Projektivitäten der Schar (19) führen die s-Kurven in sich über.

Wir können zusammenfassen: *Die projektive Bewegung* (19) *ist von der Wahl* $t = t_0$ *unabhängig; jede Netzfläche besteht also aus einer einparametrigen Schar von Bahnkurven. Die Projektivitäten der Schar* (19) *bilden eine Gruppe, und jede von ihnen führt jede Bahnkurve und damit die ganze Figur der R-Kette in sich über. Dabei werden die t-Kurven einer Netzfläche ganz aufeinander abgebildet, und zwar so, daß sich die Punkte mit gleichem Parameter t entsprechen.*

Wir gehen dazu über, die Vermutung von BARNER für allgemeines (ungerades) n zu bestätigen: *Die s-Kurven jeder Netzfläche liegen in linearen Unterräumen der Dimension r.*

Analytisch kommt es darauf an zu zeigen, daß eine lineare Abhängigkeit zwischen den Vektoren

$$\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{is}, \mathfrak{x}_{iss}, \ldots, \frac{\partial^{r+1}\mathfrak{x}_i}{\partial s^{r+1}} \tag{3.20}$$

besteht. Wollte man aber diese dadurch gewinnen, daß man (9) fortgesetzt nach s ableitet, so wird man sehr bald auf unübersehbare Rechnungen geführt. Man muß also eine andere Methode verwenden, die dem geometrischen Sachverhalt besser angepaßt ist.

Hierzu stellen wir die Bewegung (19) in den Vordergrund und untersuchen nicht nur das Verhalten der Grundkurven $\mathfrak{x}_i(s, t_0)$, sondern auch dasjenige einer beliebigen Bahnkurve (14). Jeder solchen ist durch das Nullsystem (1.24) eine durch gleiche Parameterwerte s auf jene bezogene Schar von Hyperebenen

$$\mathfrak{P}(s) = \sum_k p_k \mathfrak{X}_k(s, t_0) \quad \text{(mit denselben } p_k \text{ wie in (14))} \tag{3.21}$$

zugeordnet [16]). Wir wollen eine Bahnkurve $\mathfrak{p}(s)$ zusammen mit der ihr zugeordneten Hyperebenenschar $\mathfrak{P}(s)$ ein *duales Paar* nennen und diese beiden zueinander dualen Gebilde immer gleichzeitig behandeln. Dies ermöglicht uns den Beweis der oben erwähnten Vermutung, ja sie führt darüber hinaus zu der Aussage: *Jede Bahnkurve liegt in einem linearen Unterraum der Dimension r.*

[16]) Siehe Fußnote 8.

Wir gliedern den Beweis in mehrere Schritte. Der erste führt zum

Hilfssatz 1. Für jedes beliebige duale Paar $\mathfrak{p}(s)$, $\mathfrak{P}(s)$ und jede natürliche Zahl k gilt

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \frac{\partial^k \mathfrak{P}}{\partial s^k} = 0. \tag{3.22}$$

Um dies zu zeigen, leiten wir (14) k mal nach s ab und verwenden dabei jedesmal (9). Es möge

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} = \sum_i P_i^k \mathfrak{x}_i \tag{3.23}$$

entstehen. Die Koeffizienten P_i^k sind homogene Polynome (mit ganzzahligen Koeffizienten) vom Grade k in den Größen c_j und vom Grade eins in den Koordinaten $\mathfrak{p}_j$. Nun unterscheiden sich die Ableitungsgleichungen (11) von denen (9) nur durch ein *gemeinsames* Vorzeichen, das bei jeder Ableitung auftritt. Somit ist

$$\frac{\partial^k \mathfrak{P}}{\partial s^k} = (-1)^k \sum_i P_i^k \mathfrak{X}_i \tag{3.24}$$

mit *denselben Polynomen* P_i^k wie bei (23). Hiernach ist

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \frac{\partial^k \mathfrak{P}}{\partial s^k} = (-1)^k \sum_{i,j} P_i^k P_j^k (\mathfrak{x}_i \mathfrak{X}_j), \tag{3.25}$$

und die Schiefsymmetrie der Tabelle (1.24) für die Produkte $\mathfrak{x}_i \mathfrak{X}_i$ führt auf (22), womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Eine Aussage im Falle verschiedener Differentiationsordnungen bei $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ macht der *Hilfssatz* 2: *Für ein beliebiges Paar natürlicher Zahlen* k, l *ist*

$$(-1)^l \frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \frac{\partial^l \mathfrak{P}}{\partial s^l} + (-1)^k \frac{\partial^l \mathfrak{p}}{\partial s^l} \cdot \frac{\partial^k \mathfrak{P}}{\partial s^k} = 0. \tag{3.26}$$

Zum Beweis verwenden wir (23), (24) und ein entsprechendes Gleichungspaar, wo bis zur Ordnung l differenziert wird. Dann erhält man wegen der Schiefsymmetrie von (1.24)

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \frac{\partial^l \mathfrak{P}}{\partial s^l} = (-1)^l \sum_{i>j} (P_i^l P_j^k - P_j^l P_i^k)\, e \text{ [17]} \tag{3.27}$$

und

$$\frac{\partial^l \mathfrak{p}}{\partial s^l} \cdot \frac{\partial^k \mathfrak{P}}{\partial s^k} = (-1)^k \sum_{i>j} (P_i^k P_j^l - P_j^k P_i^k)\, e, \tag{3.28}$$

woraus durch Addition die Behauptung (26) folgt.

Im Spezialfall $l = k+1$ liefert der zweite Hilfssatz

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \frac{\partial^{k+1} \mathfrak{P}}{\partial s^{k+1}} - \frac{\partial^{k+1} \mathfrak{p}}{\partial s^{k+1}} \cdot \frac{\partial^k \mathfrak{P}}{\partial s^k} = 0, \tag{3.29}$$

und durch Ableiten erhält man aus (17)

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \frac{\partial^{k+1} \mathfrak{P}}{\partial s^{k+1}} + \frac{\partial^{k+1} \mathfrak{p}}{\partial s^{k+1}} \cdot \frac{\partial^k \mathfrak{P}}{\partial s^k} = 0, \tag{3.30}$$

[17]) $i>j$ symbolisiert Indexpaare, für die $i-j \equiv h \pmod{n+1}$, $0 < h \leqq r+1$ gilt.

also verschwinden beide Summanden einzeln. Dies und die Aussage des ersten Hilfssatzes können wir in Form einer Produkttabelle zusammenfassen:

(3.31)

	$\mathfrak{P}$	$\mathfrak{P}_s$	$\mathfrak{P}_{ss}$	$\mathfrak{P}_{sss}$	$\mathfrak{P}_{ssss}$	⋯
$\mathfrak{p}$	0	0				
$\mathfrak{p}_s$	0	0	0			
$\mathfrak{p}_{ss}$		0	0	0		
$\mathfrak{p}_{sss}$			0	0	0	
⋮			⋮	⋮	⋮	⋮

(an den leeren Stellen stehen irgendwelche, noch nicht näher bestimmte Größen).

Nun kann man aber schrittweise schließen, daß in der Tabelle nur Nullen stehen. Es lassen sich nämlich zunächst zu beiden Seiten dieser drei „Schrägzeilen" je eine weitere mit lauter Nullen anschließen: Aus

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \frac{\partial^{k+1} \mathfrak{P}}{\partial s^{k+1}} = 0 \tag{3.32}$$

folgt durch Ableiten

$$\frac{\partial^{k+1} \mathfrak{p}}{\partial s^{k+1}} \cdot \frac{\partial^{k+1} \mathfrak{P}}{\partial s^{k+1}} + \frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \frac{\partial^{k+2} \mathfrak{P}}{\partial s^{k+2}} = 0, \tag{3.33}$$

und der erste Summand verschwindet nach (22), also auch der zweite; das ergibt die rechte obere Schrägzeile mit lauter Nullen. Entsprechend erhält man die Nullen in der anschließenden linken unteren Schrägzeile. Da sich dieses Verfahren offenbar nach beiden Seiten unbeschränkt fortsetzen läßt, enthält die Tabelle tatsächlich nur Nullen.

Nun zur geometrischen Interpretation dieses Sachverhalts! Betrachten wir die erste Spalte

$$\frac{\partial^k \mathfrak{p}}{\partial s^k} \cdot \mathfrak{P} = 0. \tag{3.34}$$

Sie besagt, daß der ganze lineare Raum, indem die Kurve $\mathfrak{p}(s)$ liegt, in der Hyperebene $\mathfrak{P}(s_0)$ enthalten ist. Entsprechend lassen sich die ersten beiden Spalten deuten: Der Raum, in dem die Kurve $\mathfrak{p}(s)$ liegt, ist im Durchschnitt zweier benachbarter Hyperebenen, d. h. im Raum der momentanen Fixpunkte von $\mathfrak{P}(s)$ enthalten. So fortfahrend erhält man den Inhalt der ganzen Tabelle, der sich etwa wie folgt zusammenfassen läßt: *Für jedes duale Paar liegt der Verbindungsraum aller Punkte* $\mathfrak{p}(s)$ *ganz im Schnittraum aller Hyperebenen* $\mathfrak{P}(s)$. Diese Sprechweise verdeutlicht wieder die Selbstdualität der R-Ketten.

Für jedes duale Paar erklären wir: p sei die Dimension des Verbindungsraumes aller Punkte der Kurve $\mathfrak{p}(s)$ und $\bar{p}$ die des Schnittraumes aller Hyperebenen der Schar $\mathfrak{P}(s)$. Nach dem obigen Satz ist

$$p \leqq \bar{p}. \tag{3.35}$$

Dieses Resultat halten wir zur späteren Verwendung bereit; vorerst beweisen wir den *Hilfssatz* 3: *Für ein duales Paar sei* m *die größte der Zahlen* h, *so daß*

die Vektoren

$$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_s, \ldots, \frac{\partial^h \mathfrak{p}}{\partial s^h}$$

linear unabhängig sind; entsprechend sei $\overline{m}$ *die größte der Zahlen* l, *so daß die Vektoren*

$$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_s, \ldots, \frac{\partial^l \mathfrak{P}}{\partial s^l}$$

linear unabhängig sind. Dann ist für jedes duale Paar $m = \overline{m}$.

Zum Beweis des Hilfssatzes nehmen wir an, es bestehe eine Abhängigkeit

$$\sum_{q=0}^{h} A_q \frac{\partial^q \mathfrak{p}}{\partial s^q} = 0 \qquad \text{(nicht alle } A_q = 0\text{)}. \tag{3.36}$$

Dann folgt aus (23)

$$\sum_i \Big(\sum_{q=0}^{h} A_q P_i^q \Big) \mathfrak{x}_i = 0, \tag{3.37}$$

also sind, da zwischen den Vektoren $\mathfrak{x}_i$ nur die *eine* Abhängigkeit (1.2) besteht, alle in Klammern stehenden Koeffizienten einander gleich:

$$\sum_{q=0}^{h} A_q P_i^q = R \qquad (R \text{ unabhängig von } i). \tag{3.38}$$

Setzen wir nun

$$\overline{A}_q = (-1)^q A_q, \tag{3.39}$$

so gilt

$$\sum_{q=0}^{h} \overline{A}_q \frac{\partial^q \mathfrak{P}}{\partial s^q} = 0 \tag{3.40}$$

mit derselben Zahl h wie in (36), denn nach (24) kann (40) in die Gleichung

$$\sum_i \Big(\sum_{q=0}^{h} \overline{A}_q (-1)^q P_i^q \Big) \mathfrak{X}_i = 0 \tag{3.41}$$

umgeformt werden, die nach (1.22) genau dann besteht, wenn alle Koeffizienten in den Klammern einander gleich sind. Das ist aber nach (38) und (39) gerade der Fall. Hieraus folgt, daß die Zahl der unabhängigen Hyperebenenvektoren nicht größer ist als die der Punktvektoren, also $\overline{m} \leqq m$. Wir können aber offensichtlich auch von einer Abhängigkeit (40) ausgehen und dann das Bestehen von (36) folgern; also ist, wie behauptet, nur $m = \overline{m}$ möglich.

Die Zahlen $m, \overline{m}$ hängen natürlich mit den Dimensionszahlen $p, \overline{p}$ zusammen; es gilt auf Grund der Definitionen dieser Zahlen $m = p + 1$; $\overline{m} = 2r + 1 - \overline{p}$, denn der Gesamtraum hat die Dimension $n = 2r + 1$. Der dritte Hilfssatz liefert also die Beziehung

$$p = 2r - \overline{p}. \tag{3.42}$$

Jetzt verwenden wir unser früheres Resultat (35) und erhalten aus (42)

$$p \leqq r, \tag{3.43}$$

und das ist der Hauptinhalt des zu beweisenden Dimensionssatzes. Wir heben hervor: *Jede Bahnkurve* $\mathfrak{p}(s)$ *liegt in einem linearen Unterraum, dessen Dimension höchstens gleich* r *ist.*

Es bleibt zu zeigen, daß für die Bahnkurven, die auf den Netzflächen liegen, also für die Kurven $\mathfrak{x}_i(s, t_0)$, p tatsächlich gleich r ist.

Zieht man zum Beweis die Ableitungsgleichungen (9) heran, so erkennt man, daß die k-te Ableitung von $\mathfrak{x}_i$ nach s eine Linearkombination von $\mathfrak{x}_{i-k}, \ldots, \mathfrak{x}_i, \ldots, \mathfrak{x}_{i+k}$ mit von Null verschiedenen Koeffizienten bei $\mathfrak{x}_{i-k}$ und bei $\mathfrak{x}_{i+k}$ ist. Daher tritt eine Abhängigkeit frühestens nach $(r+1)$-maliger Differentiation auf, und dort nur deshalb, weil die gegenüber r-maliger Ableitung neu hinzukommenden Glieder mit $\mathfrak{x}_{i+r+1}$ und mit $\mathfrak{x}_{i-r-1}$, wie sich herausstellt, gleiche Koeffizienten haben und dann nach (1.2) durch eine Linearkombination von $\mathfrak{x}_{i-r}, \ldots, \mathfrak{x}_i, \ldots, \mathfrak{x}_{i-r}$ ersetzbar werden. Also ist für die s-Kurven der Netzflächen

$$p \geqq r \tag{3.44}$$

und das ergibt zusammen mit (43) die volle Behauptung.

Wir wollen diejenigen Bahnkurven, für die $p = r$ gilt, genauer untersuchen. Da p als die Dimension der Bahnkurven definiert war, gilt jetzt

$$\frac{\partial^{r+1}\mathfrak{p}}{\partial s^{r+1}} - \sum_{q=0}^{r} Q_q \frac{\partial^q \mathfrak{p}}{\partial s^q} = 0 \tag{3.45}$$

und die Vektoren

$$\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_s, \ldots, \frac{\partial^r \mathfrak{p}}{\partial s^r} \tag{3.46}$$

sind linear unabhängig. Können die Koeffizienten Q_q von den Koordinaten p_i abhängen? — Zur Beantwortung dieser Frage leiten wir (45) nach p_i ab und erhalten

$$\frac{\partial^{r+1}\mathfrak{x}_i}{\partial s^{r+1}} - \sum_{q=0}^{r} \left(\frac{\partial Q_q}{\partial p_i} \frac{\partial^q \mathfrak{p}}{\partial s^q} + Q_q \frac{\partial^q \mathfrak{x}_i}{\partial s^q} \right) = 0. \tag{3.47}$$

Wenn wir hierin alle $p_i = 0$ setzen, bleibt

$$\frac{\partial^{r+1}\mathfrak{x}_i}{\partial s^{r+1}} - \sum_{q=0}^{r} Q_q^0 \frac{\partial^q \mathfrak{x}_i}{\partial s^q} = 0 \tag{3.48}$$

stehen; dabei sollen Q_q^0 die Werte der Größen Q_q für $p_k = 0$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ bedeuten. Man kann nun diese Gleichungen wieder mit p_i multiplizieren und über alle i summieren. Das ergibt eine Gleichung der Bauart (45) aber nun sind alle $Q_q = Q_q^0$, also unabhängig von den Koordinaten $p_0, p_1, \ldots, p_{n+1}$. Das heißt alle betrachteten Bahnkurven genügen ein und derselben Grundgleichung bezüglich des Parameters s. Geometrisch bedeutet das: *Diejenigen Bahnkurven, für die $p = r$ ist, können projektiv aufeinander abgebildet werden, und zwar so, daß die Punkte, die zum gleichen Parameterwert s gehören, einander entsprechen.*

Die Gl. (48) ist das Analogon zu (2.18). Wir hatten im Abschnitt 2 gesehen, daß die Koeffizienten A, B jener Gleichung Konstanten waren. Gilt dies auch für die Koeffizienten Q_q^0 von (48)? — Zunächst weiß man nur, daß sie nicht

von s abhängen, denn sie lassen sich nach (23) aus den Größen P_i^k, die von s unabhängig sind, berechnen.

Um die Unabhängigkeit von t festzustellen, leiten wir (48) nach t ab:

$$\frac{\partial^{r+2}\mathfrak{x}_i}{\partial s^{r+1}\partial t} - \sum_{q=0}^{r} \frac{\partial Q_q^0}{\partial t} \cdot \frac{\partial^q \mathfrak{x}_i}{\partial s^q} + Q_q^0 \frac{\partial^{q+1}\mathfrak{x}_i}{\partial s^q \partial t} = 0. \tag{3.49}$$

Kürzt man die linke Seite von (48) mit $L(\mathfrak{x}_i)$ ab, so ergibt sich nach (7) und (10)

$$c_i L(\mathfrak{x}_{i-1}) - (c_{i+1} - c_{i-r-1}) L(\mathfrak{x}_i) - c_{i-r} L(\mathfrak{x}_{i+1}) - \sum_{q=0}^{r} \frac{\partial Q_q^0}{\partial t} \frac{\partial^q \mathfrak{x}_i}{\partial s^q} = 0. \tag{3.50}$$

Nun ist aber der Differentialausdruck L von i unabhängig, so daß nach (48) neben $L(\mathfrak{x}_i)$ auch $L(\mathfrak{x}_k)$ für jedes k verschwindet. Von (50) bleibt also nur

$$\sum_{q=0}^{r} \frac{\partial Q_q^0}{\partial t} \frac{\partial^q \mathfrak{x}_i}{\partial s^q} = 0 \tag{3.51}$$

übrig. Hieraus folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren

$$\frac{\partial^q \mathfrak{x}_i}{\partial s^q} \quad (q = 0, 1, \ldots, r), \tag{3.52}$$

daß die Koeffizienten Q_q^0 nicht von t abhängen. Wir haben somit: *Die s-Kurven jeder Netzfläche werden durch die t-Kurven projektiv aufeinander abgebildet.*

Wie sich noch weitere Eigenschaften der gewöhnlichen R-Ketten auf den allgemeinen Fall übertragen lassen, werde im nächsten Abschnitt näher ausgeführt.

4. Wir untersuchen zuerst die t-Kurven. Bei den gewöhnlichen R-Ketten des dreidimensionalen Raumes sind es Komplexkurven eines gemeinsamen linearen Komplexes. Wir können diese Aussage mit Hilfe des dem Komplex zugeordneten Nullsystems auch so formulieren: Es gibt ein in t-Richtung festes Nullsystem, und die Tangenten zusammengehöriger t-Kurven (gleiche Parameter s_0, verschiedene Netzflächen) liegen in den Nullebenen ihrer Berührungspunkte.

In dieser Fassung ist eine Übertragung auf den allgemeinen Fall möglich. Wir werden vermuten, daß das ausgezeichnete Nullsystem (s. Abschnitt 1) in t-Richtung fest ist.

Ist in einem projektiven Raum ungerader Dimension ein Nullsystem gegeben, so ist in jedem Punkt ein hyperebenes Geradenbündel dadurch ausgezeichnet, daß seine Geraden in der Nullebene des Bündelzentrums liegen. Umgekehrt ist durch Vorgabe geeigneter Geradenbündel in $n+2$ Punkten, von denen je $n+1$ den vollen Raum aufspannen, ein Nullsystem eindeutig bestimmt. Wir denken uns ein Nullsystem gegeben und bilden die Gesamtheit derjenigen Geraden, die irgendeinem ausgezeichneten Geradenbündel angehören, in den Geradenraum ab, der zu unserm Urbildraum gehört. Alle derart erhaltenen Bildpunkte liegen in einer Hyperebene $\mathfrak{H}$ dieses Geradenraumes, und man nennt die zugehörige Geradengesamtheit des Urbildraumes wieder wie im dreidimensionalen Falle einen linearen Geradenkomplex. Betrachtet

man nun ein mit einem Parameter t bewegtes Bezugssystem, so ist der Komplex (bzw. das Nullsystem) genau dann fest zu nennen, wenn es die so definierte Hyperebene $\mathfrak{H}$ ist.

Im vorliegenden Falle, wo das Nullsystem durch die Produkttabelle (1.24) gegeben ist, kann man das Geradenbündel durch den Punkt $\mathfrak{x}_i$ sehr einfach angeben: Es besteht aus allen Geraden

$$(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{y}_i), \tag{4.1}$$

wobei $\mathfrak{y}_i$ eine beliebige Linearkombination der Vektoren

$$\mathfrak{x}_{i-r}, \mathfrak{x}_{i-r+1}, \cdots, \mathfrak{x}_{i-1}, \mathfrak{x}_{i+1}, \cdots, \mathfrak{x}_{i+r-1}, \mathfrak{x}_{i+r} \tag{4.2}$$

(das sind alle, bis auf $\mathfrak{x}_i$ selbst und die beiden $\mathfrak{x}_i$ gegenüberliegenden Punkte $\mathfrak{x}_{i-r-1}, \mathfrak{x}_{i+r+1}$) bedeutet. Unsere Hyperebene $\mathfrak{H}$ wird also von den folgenden Punkten aufgespannt:

$$\begin{cases} (\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+1}) & (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1) \\ (\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+2}) & (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+r}) & (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1). \end{cases} \tag{4.3}$$

Wir haben sie gleich in r Klassen zu je $n+2$ Stück eingeteilt. Ihre Zahl stimmt mit der für eine Hyperebene des Geradenraumes erforderlichen überein, denn der volle Geradenraum über einem Raum der Dimension $n=2r+1$ hat die Dimension

$$g = \binom{n+1}{2} - 1 = \binom{2r+2}{2} - 1 = 2r^2 + 3r = r(n+2). \tag{4.4}$$

Es ist noch zu zeigen, daß die Punkte (3) linear unabhängig sind. Nimmt man zu ihnen noch einen einzigen, etwa

$$(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_{r+1}), \tag{4.5}$$

der in (3) noch fehlenden Klasse

$$(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+r+1}) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1) \tag{4.6}$$

hinzu, so lassen sich wegen (1.2) die übrigen Vektoren dieser Klasse aus (3) und dem hinzugenommenen linear kombinieren:

$$(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_{r+1}) = \Big(\mathfrak{x}_0, -\sum_{k \neq r+1} \mathfrak{x}_k\Big) \equiv -(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_{r+2}) = (\mathfrak{x}_{r+2}, \mathfrak{x}_{r+2+r+1}) \pmod{(3)}. \tag{4.7}$$

Man hat also zunächst eine Darstellung für den in (6) für $i=r+2$ stehenden Geradenvektor. So fährt man reihum fort und erhält schließlich alle Vektoren (6), und damit alle Vektoren des Geradenraumes, als Linearkombinationen von (3) und (5). Daraus folgt die Unabhängigkeit der Vektoren (3); sie spannen also tatsächlich eine Hyperebene des Geradenraumes auf.

Wie verhält sich nun diese Hyperebene in Abhängigkeit des Parameters t? — Fest ist sie, wenn die t-Ableitungen der Vektoren (3) wieder aus diesen allein kombiniert werden können.

Diese Ableitungen werden nach (3.10) gebildet. Man sieht, daß die Indexdifferenz der beiden zu einem Geradenvektor vereinigten Punktvektoren höchstens um eins erhöht wird. So kann es also nur bei der letzten Klasse vorkommen, daß ihre Ableitungen nicht mehr aus (3) kombinierbar werden. Für diese ergibt sich

$$(4.8) \qquad (\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+r})_t \equiv c_i\{(\mathfrak{x}_{i-1}, \mathfrak{x}_{i+r}) - (\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+r+1})\} \qquad (\mathrm{mod}\,(3)).$$

Weiter ist nach (1.2)

$$(4.9) \quad (\mathfrak{x}_{i-1}, \mathfrak{x}_{i+r}) - (\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+r+1}) \equiv (\mathfrak{x}_{i-1}, \mathfrak{x}_{i+r} + \mathfrak{x}_{i+r+1}) \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,(3)).$$

Also führen auch die Ableitungen dieser letzten Klasse nicht aus dem Modul der Vektoren (3) heraus, und es gilt: *Das ausgezeichnete Nullsystem ist in t-Richtung fest.*

Hieraus folgt für die t-Kurven, da ihre Tangenten in den entsprechenden Nullebenen liegen: *Alle Tangenten der $n+2$ auf den verschiedenen Netzflächen zum gleichen Parameterwert s_0 gehörenden t-Kurven liegen in einem gemeinsamen festen linearen Komplex.*

Bemerkenswerterweise gilt auch eine Umkehrung: *Die R-Ketten sind unter den Laplace-Ketten* (der Art von Abschnitt 1) *dadurch charakterisiert, daß die Bildhyperebenen des ausgezeichneten Nullsystems nur eine einparametrige Gesamtheit durchlaufen.*

Die Bildhyperebene $\mathfrak{H}$ des ausgezeichneten Nullsystems wird auch bei den allgemeinen Laplace-Ketten, die in Abschnitt 1 beschrieben sind, von den Vektoren (3) aufgespannt. Einparametrigkeit liegt vor, wenn es eine Richtung σ $(\sigma \neq 0)$ gibt, so daß

$$(4.10) \qquad d\mathfrak{H} \wedge \sigma \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\,\mathfrak{H})$$

ist. Zur Bildung von $d\mathfrak{H}$ müssen die Ableitungen der Vektoren (3) nach (1.11) berechnet werden. Man sieht wieder, daß nur die letzte Klasse von (3) bei Ableitung aus ihr herausführen kann. Für diese letzte Klasse findet man

$$(4.11) \quad d(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+r}) \wedge \sigma \equiv (\alpha_i \wedge \sigma)(\mathfrak{x}_{i-1}, \mathfrak{x}_{i+r}) + (\beta_{i+r} \wedge \sigma)(\mathfrak{x}_i, \mathfrak{x}_{i+r+1}) \quad (\mathrm{mod}\,(3)).$$

Der hier rechts stehende Vektor ist genau dann im Modul (3) enthalten, wenn

$$(4.12) \qquad \alpha_i \wedge \sigma + \beta_{i+r} \wedge \sigma = 0$$

ist. Hiermit gleichwertig sind die Beziehungen

$$(4.13) \qquad (\alpha_{i-r} + \beta_i) \wedge (\alpha_{i+1} + \beta_{i+r+1}) = 0,$$

die man durch Elimination von σ aus (12) erhält [18]). Nach (1.4) und (1.12) kann man dafür auch

$$(4.14) \qquad a_{i+1} b_i = a_{i-r} b_{i+r+1}$$

schreiben; diese Beziehungen sind aber nach (3.3) für R-Ketten kennzeichnend, womit der Satz bewiesen ist.

[18]) Die Auswahl je zweier Gln. (11) zur Elimination von σ ist mit Rücksicht auf das Ergebnis (13) getroffen.

Wir fragen nach den höheren Schmiegebenen der t-Kurven; inzidieren diese auch noch mit den zugehörigen Nullebenen? Auf Grund der Ableitungsgleichungen (3.10) und der Produkttabelle (1.24) erhält man sofort

$$\mathfrak{x}_i \mathfrak{X}_i = 0, \quad \mathfrak{x}_{it} \mathfrak{X}_i = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial^r \mathfrak{x}_i}{\partial t^r} \mathfrak{X}_i = 0. \tag{4.15}$$

Weiter ist wegen

$$\begin{cases} \frac{\partial^{r+1} \mathfrak{x}_i}{\partial t^{r+1}} \equiv c_i c_{i-1} \cdots c_{i-r} \mathfrak{x}_{i-r-1} + (-1)^{r+1} c_{i-r} c_{i-r+1} \cdots c_i \mathfrak{x}_{i+r+1} \\ \qquad (\mathrm{mod}\, \mathfrak{x}_{i+r},\ |\nu| \leqq r) \end{cases} \tag{4.16}$$

für ungerade r auch noch

$$\frac{\partial^{r+1} \mathfrak{x}_i}{\partial t^{r+1}} \mathfrak{X}_i = 0, \tag{4.17}$$

während für gerade r dieses Produkt von Null verschieden ist. Ferner ergibt sich, wie hier nur erwähnt sei, daß für ungerade r

$$\frac{\partial^{r+2} \mathfrak{x}_i}{\partial t^{r+2}} \mathfrak{X}_i \neq 0 \tag{4.18}$$

ist, so daß wir zusammenfassend sagen können: *Die Schmiegebenen der Ordnung k der t-Kurven inzidieren mit den zugehörigen Nullebenen, wenn bei geradem r $k \leqq r$ bzw. bei ungeradem r $k \leqq r+1$ ist.*

Wir kommen noch einmal auf den projektiven Bewegungsvorgang in s-Richtung zurück. Es interessiert vor allem die Bewegung der Hyperebene $\mathfrak{H}$ des Geradenraumes. Bei den gewöhnlichen R-Ketten des dreidimensionalen Raumes hatten wir im Anschluß an (2.24) gesehen, daß die Hyperebenen einem Büschel angehörten, also einen dreidimensionalen Unterraum als „Drehachse" enthalten. Dieser Achsenraum — Bild einer Geradenkongruenz — ist bezüglich beider Parameter fest. Es stellte sich heraus, daß diese Kongruenz von den Bahnkurven, die hier Geraden sind, aufgespannt wird.

Ähnlich ist auch die Sachlage im allgemeinen Fall. Wir wollen uns aber nicht nur auf die von einer R-Kette erzeugten s-Bewegung beschränken, sondern, ausgehend von einer beliebigen projektiven Bewegung, unsere Untersuchungen auf eine umfassendere Klasse erstrecken.

Es seien in einem n-dimensionalen projektiven Raum (mit ungeradem $n = 2r+1$) $n+2$ durch gleiche Parameterwerte punktweise aufeinander bezogene Kurven $\mathfrak{x}_i(s)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n+1)$ derart gegeben, daß je $n+1$ entsprechende (d. h. zu gleichen Parameterwerten gehörende) ihrer Punkte den vollen Raum aufspannen. Dann lassen sich die Vektoren $\mathfrak{x}_i$ so normieren, daß

$$\sum_{i=0}^{n+1} \mathfrak{x}_i = 0 \tag{4.19}$$

gilt. Dies sei von vornherein so eingerichtet. Weiter seien die Kurven $\mathfrak{x}_i(s)$ durch ihre Numerierung zyklisch geordnet, so daß $\mathfrak{x}_i$ und $\mathfrak{x}_{i+1}$ „benachbart" heißen können; das gilt insbesondere auch von $\mathfrak{x}_{n+1}$ und $\mathfrak{x}_0$. Mit den Indizes wird also (wie bisher) modulo $n+2$ gerechnet.

Je n aufeinanderfolgende Punkte $\mathfrak{x}_{i-r}, \ldots, \mathfrak{x}_i, \ldots, \mathfrak{x}_{i+r}$ definieren eine Hyperebene $\mathfrak{X}_i$. (Sie sind linear unabhängig, da nach Voraussetzung je $n+1$ den vollen Raum aufspannen.) Die Vektoren $\mathfrak{X}_i$ seien so normiert, daß (1.24) gilt. Hierdurch ist wieder ein Nullsystem ausgezeichnet.

Unsere $n+2$ Kurven $\mathfrak{x}_i(s)$ definieren nun eine *projektive Bewegung*, bei der den *Bahnkurven*

$$\mathfrak{p}(s) = \sum_{i=0}^{n+1} p_i \mathfrak{x}_i(s) \qquad p_i = \text{const} \tag{4.20}$$

durch gleiche p_i-Werte eineindeutig [19]) *Bahnhyperebenenscharen*

$$\mathfrak{P}(s) = \sum_{i=0}^{n+1} p_i \mathfrak{X}_i(s) \tag{4.21}$$

zugeordnet sind. Da diese Zuordnung durch ein lokal definiertes Nullsystem geleistet wird, gilt

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{P} = 0. \tag{4.22}$$

Wir wollen eine projektive Bewegung mit der Eigenschaft, daß die Tangenten aller Bahnkurven an jeder Stelle in den zugeordneten Bahnhyperebenen liegen, eine *Schiebung* nennen. Analytisch bedeutet das

$$\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{P} = 0. \tag{4.23}$$

Wegen (22) ist auch

$$\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{P}' = 0. \tag{4.24}$$

Das heißt: *Die Schiebungen sind selbstdual.*

Zur weiteren analytischen Behandlung ziehen wir die Ableitungsgleichungen, die wir in der Form

$$\mathfrak{x}_i' = \sum_{k=0}^{n+1} a_{ik} \mathfrak{x}_k \tag{4.25}$$

ansetzen können, heran. Für die Koeffizienten a_{ik} folgt durch Ableitung von (19) die Bedingung

$$\sum_i a_{ik} = g \qquad (g \text{ unabhängig von } k). \tag{4.26}$$

Weiter hat man zu beachten, daß zur rechten Seite von (25) noch ein beliebiges Vielfaches von (19) addiert werden kann, was einem Übergang

$$a_{ik}^* = a_{ik} + h_i \tag{4.27}$$

entspricht.

Die Schiebungsbedingung (23) schreibt sich mit (25) so:

$$\sum_{i,j} p_i p_j \left\{ \sum_k a_{ik} (\mathfrak{x}_k, \mathfrak{X}_j) \right\} = 0. \tag{4.28}$$

[19]) Siehe Fußnote 8.

Sie soll für jede Wahl der $\mathfrak{p}_i$ gelten, nicht nur für solche, die einer quadratischen Relation genügen. Deshalb verschwinden in (28) die Koeffizienten bei allen $\mathfrak{p}_i\mathfrak{p}_j$ einzeln. Wenn man noch die Produkte $(\mathfrak{x}_k\mathfrak{X}_i)$ nach (1.24) ersetzt, erhält man

$$a_{ii+r+1} - a_{ii-r-1} = 0, \tag{4.29}$$

$$a_{ij-r-1} - a_{ij+r+1} + a_{ji-r-1} - a_{ji+r+1} = 0. \tag{4.30}$$

Wir legen die Größen h_i zweckmäßigerweise so fest, daß

$$a^*_{ii+r+1} = a^*_{ii-r-1} = 0 \tag{4.31}$$

gilt; das ist wegen (29) zu erreichen. (30) ist gegenüber (27) invariant, ebenso (26), wenn $g^* = g + \sum_i h_i$ gesetzt wird. Wir lassen daher die Sterne gleich wieder weg.

Die Umnormungen, die (19) erhalten, sind $\bar{\mathfrak{x}}_i = f\,\mathfrak{x}_i$, mit derselben Funktion f in allen Gleichungen. Dabei wird

$$\bar{a}_{ik} = a_{ik} \quad (\text{für } i \neq k), \qquad \bar{a}_{ii} = a_{ii} + (\log f)', \qquad \bar{g} = g + (\log f)'. \tag{4.32}$$

Schließlich ist noch eine Parametertransformation $ds = m\,d\hat{s}$ (mit $m \neq 0$) möglich, sie bedingt

$$\hat{a}_{ik} = m\,a_{ik}, \qquad \hat{g} = m\,g. \tag{4.33}$$

(29) und (30) sind auf Grund ihrer geometrischen Bedeutung invariant. (32) kann man dazu verwenden, um $g = 0$ zu erreichen; dies bleibt dann bei (33) erhalten. Wir fassen zusammen: *Das System* (19), (25) *mit den Bedingungen* (26), (29), (30) *beschreibt eine allgemeine Schiebung. Durch die angegebenen, geometrisch unwesentlichen Umformungen kann* (31) *und* $g = 0$ *erreicht werden. Die Normierung der Vektoren* $\mathfrak{x}_i$ *ist dadurch bis auf eine gemeinsame Konstante festgelegt; die Parameterverteilung ist willkürlich. Zwei solche Systeme stellen daher projektiv äquivalente Schiebungen dar, wenn ihre Koeffizienten nach* (33) *zusammenhängen.*

Für die Hyperebenen gelten Ableitungsgleichungen der Form

$$\mathfrak{X}_i' = \sum_k b_{ik}\,\mathfrak{X}_k. \tag{4.34}$$

Die Normierung der Vektoren $\mathfrak{X}_i$ ist bis auf eine gemeinsame Konstante nach (1.24) festgelegt. Es folgt nämlich aus dieser Tabelle

$$\mathfrak{x}_i\left(\sum_k \mathfrak{X}_k\right) = 0 \tag{4.35}$$

für jedes i. Also müßten entweder alle Punkte $\mathfrak{x}_i$ in der von $\sum_k \mathfrak{X}_k$ beschriebenen Hyperebene liegen, oder es gilt

$$\sum_k \mathfrak{X}_k = 0. \tag{4.36}$$

Da der erste Fall ausgeschlossen ist, bleibt nur der zweite übrig. Nun wäre noch eine Umnormung mit einer gemeinsamen Funktion denkbar. Diese muß aber konstant sein, um die Konstanz der Größe e in (1.24) zu erhalten.

Durch Ableiten der Produkte $\mathfrak{x}_i \mathfrak{X}_k$ erhält man nach (25) und (34)

$$a_{ik-r-1} - a_{ik+r+1} + b_{ki+r+1} - b_{ki-r-1} = 0. \tag{4.37}$$

Für $k=i$ ist nach (31)

$$b_{ii+r+1} = b_{ii-r-1}, \tag{4.38}$$

und es kann durch eine zu (27) analoge Transformation erreicht werden, daß

$$b^*_{ii+r+1} = b^*_{ii-r-1} = 0 \tag{4.39}$$

ist. (37) bleibt bei dieser Umformung erhalten. Die Sterne werden wieder weggelassen. Unter Verwendung von (30) kann (37) durch

$$a_{ki+r+1} - a_{ki-r-1} + b_{ki+r+1} - b_{ki-r-1} = 0 \tag{4.40}$$

ersetzt werden. Mit der Bezeichnung

$$a_{ik} + b_{ik} = c_{ik} \tag{4.41}$$

können wir hierfür auch

$$c_{ki+r+1} - c_{ki-r-1} = 0 \tag{4.42}$$

schreiben. Das heißt, in einer Zeile der Matrix (c_{ik}) stehen lauter gleiche Elemente; und da zwei davon wegen (31), (39) Null sind, besteht die Zeile nur aus Nullen, und das gilt für jede Zeile. Also ist nach (41)

$$b_{ik} = -a_{ik}. \tag{4.43}$$

Die Ableitungsgleichungen der Ebenenvektoren einer Schiebung stimmen bis auf ein gemeinsames Vorzeichen mit denen der Punktvektoren überein.

Um eine Aussage über die Schmiegebenen der Ordnung 2 der Bahnkurven zu erhalten, betrachten wir das Produkt $\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{P}'$. Es ist

$$\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{P}' = \sum_{i,j,k,l} - p_i p_j a_{ik} a_{jl} (\mathfrak{x}_k \mathfrak{X}_l). \tag{4.44}$$

Insbesondere ist der Koeffizient bei p_i^2

$$-\sum_{k,l} a_{ik} a_{il} (\mathfrak{x}_k \mathfrak{X}_l) = 0 \tag{4.45}$$

und der bei $p_i p_j$

$$-\sum_{k,l} (a_{ik} a_{jl} + a_{jk} a_{il}) (\mathfrak{x}_k \mathfrak{X}_l) = 0. \tag{4.46}$$

Also gilt identisch in s

$$\mathfrak{p}' \cdot \mathfrak{P}' = 0. \tag{4.47}$$

Man erhält hiermit durch Ableiten von (22) und (23)

$$\mathfrak{p}'' \cdot \mathfrak{P} = 0, \qquad \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{P}'' = 0. \tag{4.48}$$

Somit gilt: *Die Schmiegebenen der Ordnung 2 der Bahnkurven sind in ihren zugehörigen Nullebenen enthalten.* (Und analog die duale Aussage.)

Für die höheren Schmiegebenen trifft das Entsprechende im allgemeinen nicht zu. Schon die Inzidenzforderung der Schmiegebenen der Ordnung 3 mit den zugehörigen Nullebenen zieht die Zusatzbedingungen

$$\sum_{k \neq n} (a'_{ik} a_{in} - a'_{in} a_{ik}) (\mathfrak{x}_k \mathfrak{X}_n) = 0, \tag{4.49}$$

$$\sum_{k \neq n} (a'_{ik} a_{jn} + a'_{jk} a_{in} - a'_{in} a_{jk} - a'_{jn} a_{ik}) (\mathfrak{x}_k \mathfrak{X}_n) = 0 \tag{4.50}$$

nach sich. Eine Lösung dieses Gleichungssystems für die a'_{ik} ist

$$a'_{ik} = c\, a_{ik} \tag{4.51}$$

mit ein und demselben c in allen Gleichungen. Dies ist aber nicht immer die einzige Lösung von (49), (50) [20].

Diejenigen Schiebungen hingegen, für welche (51) gilt, stehen in einer bemerkenswerten Beziehung zu den Schiebungen, die bei den R-Ketten auftreten. Es läßt sich nämlich durch

$$\frac{df}{ds} - c f = 0, \quad f = 0, \quad \frac{ds^*}{ds} = f(s) \tag{4.52}$$

ein neuer Parameter s^* einführen; für diesen ist wegen

$$a^*_{ik} = \frac{1}{f} a_{ik} \tag{4.53}$$

[vgl. (33)] und (51), (52)

$$\frac{da^*_{ik}}{ds^*} = \left(- \frac{f'}{f^2} a_{ik} + \frac{1}{f} c\, a_{ik} \right) \frac{1}{f} = 0. \tag{4.54}$$

Wir haben also einen Parameter gefunden, von dem die Koeffizienten a^*_{ik} der transformierten Ableitungsgleichungen nicht abhängen: *Sämtliche Bahnkurven der Schiebungen, für die* (51) *gilt, sind W-Kurven.* Aber nicht nur diese „W-Eigenschaft" haben diese speziellen Schiebungen mit den bei den R-Ketten auftretenden gemeinsam, sondern es lassen sich auch alle Überlegungen von S. 106 bis S. 110 wörtlich übertragen, denn wir haben bei den dortigen Beweisen immer nur verwendet, daß die Koeffizienten in den Ableitungsgleichungen vom Schiebparameter unabhängig sind und sich die der Punkt- und Ebenenvektoren nur um ein gemeinsames Vorzeichen unterscheiden.

Die Bahnkurven der Schiebungen, für die (51) *gilt, sind untereinander projektiv äquivalent und liegen in Ebenen der Dimension r* [21].

Wir kommen nun auf unsere Frage nach der Bewegung der Bildhyperebene $\mathfrak{H}$ zurück. Wir wollten denjenigen linearen Unterraum dieser Hyperebenen betrachten, der von den Bildpunkten sämtlicher zu einem festen Parameterwert s gehörigen Bahnkurventangenten aufgespannt wird. Er sei

[20] Zum Beispiel dann nicht, wenn die Matrix (a_{ik}) Diagonalgestalt hat; vom geometrischen Standpunkt sind diese allerdings uninteressant.

[21] Es kann natürlich wie in Abschnitt 3 vorkommen, daß gewisse Bahnkurven der Schiebung die Ebenen der Dimension r nicht voll aufspannen. Diese sind auch nicht notwendig untereinander projektiv äquivalent.

kurz der *Bahntangentenraum* genannt. Wir wollen zeigen, daß er fest ist. Dies gilt wiederum nicht für die Schiebungen im allgemeinen, sondern wir werden es nur für die speziellen, die (51) bzw. (54) erfüllen, nachweisen.

Eine Bahnkurventangente hat im Geradenraum den Bildpunkt

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}') = \sum_{i,j,k} p_i p_j a_{jk}(\underline{x}_i, \underline{x}_k) \tag{4.55}$$

also läßt sich der Bahntangentenraum von den Punkten

$$\mathbf{t}_i = \sum_k a_{ik}(\underline{x}_i, \underline{x}_k) \tag{4.56}$$

und

$$\mathbf{t}_{ij} = \sum_k \{a_{jk}(\underline{x}_i, \underline{x}_k) + a_{ik}(\underline{x}_j, \underline{x}_k)\} \tag{4.57}$$

aufspannen. Daß diese Vektoren linear abhängig sind, stört nicht, es kommt nur darauf an, daß ihre Ableitungen aus ihnen selbst kombiniert werden können. Statt (56) verwenden wir die formal nach (57) für $i=j$ gebildeten Vektoren, die sich ja nur um einen Faktor 2 von $\mathbf{t}_i$ unterscheiden.

Die Ableitungen von (57) ergeben sich nach (25) mit einigen Umrechnungen zu

$$\begin{cases} \mathbf{t}'_{ij} = \sum_{k,l} a_{ik}[a_{kl}(\underline{x}_j, \underline{x}_l) + a_{jl}(\underline{x}_k, \underline{x}_l)] + \sum_k \{a'_{ik}(\underline{x}_j, \underline{x}_k) + a'_{jk}(\underline{x}_i, \underline{x}_k)\} + \\ \quad + \sum_{k,l} a_{jk}[a_{kl}(\underline{x}_i, \underline{x}_l) + a_{il}(\underline{x}_k, \underline{x}_l)] + 2\sum_{m,l} (a_{ik}a_{jl} + a_{jk}a_{il})(\underline{x}_l, \underline{x}_k). \end{cases} \tag{4.58}$$

Hier ersetzen wir soweit wie möglich nach (57) und erhalten bei Verwendung von (51)

$$\mathbf{t}'_{ij} = \sum_k a_{ik}\mathbf{t}_{jk} + c\,\mathbf{t}_{ij} + \sum_k a_{jk}\mathbf{t}_{ik} + 2\sum_{k,l} (a_{ik}a_{jl} + a_{jk}a_{il})(\underline{x}_l \underline{x}_k). \tag{4.59}$$

Die letzte Summe verschwindet aber wegen der Schiefsymmetrie des Produkts $(\underline{x}_l, \underline{x}_k)$. Wir haben also: *Der Bahntangentenraum ist fest. Er gehört somit zum Durchschnitt aller Hyperebenen* $\mathfrak{H}(s)$.

Es sei erwähnt, daß dem Bahntangentenraum auch bei den allgemeinen Schiebungen eine besondere Bedeutung zukommt, *er enthält nämlich nur momentane Fixpunkte in der Bewegung der Hyperebene* $\mathfrak{H}$.

Es ist nach (22), (23) und (48) sowohl $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ wie auch $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'')$ in $\mathfrak{H}$ enthalten. Da

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')' = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'') \tag{4.60}$$

ist, haben wir

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')\,\mathfrak{H} = 0, \quad (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')'\,\mathfrak{H} = 0, \tag{4.61}$$

woraus auch

$$(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')\,\mathfrak{H}' = 0 \tag{4.62}$$

folgt, und das bedeutet zusammen mit der vorigen Gleichung die erwähnte Eigenschaft des Bahntangentenraumes.

Kehren wir zum Abschluß unserer Untersuchungen zu den R-Ketten zurück. Dort ist neben der Abhängigkeit vom Parameter s, die, wie wir sahen, eine spezielle Schiebung erzeugt, auch diejenige vom Parameter t zu berücksichtigen. Hängt nun, so fragen wir, der Bahntangentenraum (weiterhin gebildet aus den Tangenten an alle s-Kurven) von t ab oder ist er, wie die lineare Kongruenz — als solche erweist sich ja der Bahntangentenraum im Falle der gewöhnlichen dreidimensionalen R-Ketten — auch bezüglich t fest?

Die Antwort hierauf ergibt sich sofort nach den Vorbereitungen aus Abschnitt 3. Wir wissen, daß die Schiebung (3.19), mithin die Gesamtheit der Bahnkurven von t unabhängig ist. Dasselbe gilt dann auch für ihre Tangenten. Also ist der Bahntangentenraum auch in t-Richtung fest.

Wir können zusammenfassen: *Die Bildpunkte aller Tangenten an Bahnkurven liegen in einem festen linearen Unterraum des Geradenraumes, der schon durch die Bildpunkte der zu einem einzigen Wert s_0 gehörigen Tangenten an alle Bahnkurven bestimmt ist. Weiter ist dieser im Durchschnitt aller Hyperebenen der (nur von s abhängigen) Schar $\mathfrak{H}(s)$ enthalten.*

Literatur

[1] BARNER, M.: Über geschlossene Laplace-Ketten. Archiv d. Math. **9**, 366–377 (1958). — [2] BARNER, M.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. I. Komplexflächen als Schiebflächen. Math. Annalen **126**, 119–137 (1953). — [3] BARNER, M., u. W. DEGEN: Über sich schließende Figuren asymptotisch transformierter Kurven und W-transformierter Flächen. Math. Z. **71**, 361–379 (1959). — [4] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie, Teil I und Teil II. Göttingen Vandenhoeck & Ruprecht 1950 u. 1954. — [5] BOL, G.: Projektive Differentialgeometrie, Teil III (In Vorbereitung). — [6] DEGEN, W.: Staatsexamensarbeit. Freiburg i. Br. 1957. — [7] DEGEN, W.: Diss. Freiburg i. Br. 1958.

Freiburg i. Br., Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 26. Juni 1959)

STEPHANIDIS, N. K.
Math. Zeitschr. 73, 121–126 (1960)

Über eine Klasse von Strahlensystemen

Von
N. K. STEPHANIDIS

RIBAUCOUR hat bewiesen: Die Mittenhüllfläche eines isotropen Strahlensystems ist im allgemeinen eine Minimalfläche. Später wurde die Frage aufgeworfen, ob jedes Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche Minimalfläche ist, isotrop ist. K. KOMMERELL hat gezeigt ([13]), daß es nicht der Fall ist, und er hat sogar bewiesen, daß jede Minimalfläche Mittenhüllfläche einer sehr breiten Klasse nicht-isotroper Strahlensysteme sein kann.

Der Kürze halber nennen wir M-Strahlensystem jedes nicht-zylindrische Strahlensystem, dessen Mittenhüllfläche Minimalfläche ist.

Im folgenden wird eine notwendige und hinreichende Bedingung für den Grenzpunktabstand eines M-Strahlensystems aufgestellt. Aus dieser Bedingung folgt sofort der oben erwähnte Ribaucoursche Satz. Weiter ergeben sich die folgenden Sätze:

a) Ist der Grenzpunktabstand eines M-Strahlensystems konstant, so gibt es eine flächentreue Abbildung des sphärischen Bildes des Strahlensystems auf die in rechtwinkligen Koordinaten bezogene Ebene, bei der die Bilder der Hauptflächen des Strahlensystems den achsenparallelen Geraden in der Ebene entsprechen.

b) Ist der Grenzpunktabstand eines Strahlensystems konstant und gibt es eine flächentreue Abbildung von der in a) betrachteten Art, so ist das Strahlensystem ein M-Strahlensystem.

c) S sei ein gegebenes M-Strahlensystem. Dann kann man mittels Quadraturen eindeutig, bis auf Bewegungen, ein Strahlensystem $\overline{S}$ mit den folgenden Eigenschaften bestimmen:

1. Entsprechende Geraden von S und $\overline{S}$ sind parallel.

2. Die abwickelbaren Flächen von $\overline{S}$ entsprechen den Hauptflächen von S.

3. $\bar{\varrho} = c\,z, \quad c = \text{const},$

wobei $2\bar{\varrho}$ der Brennpunktabstand von $\overline{S}$, und $2z$ der Grenzpunktabstand von S sind.

Hier sei betont, daß wir unter Hauptflächen eines Strahlensystems diejenigen Regelflächen verstehen, für welche der Drall (der Verteilungsparameter) Extremwerte annimmt (s. [4], S. 279), und nicht die Regelflächen, die KUMMER als Hauptflächen betrachtet hat (s. [1], S. 268).

Für kritische Bemerkungen möchte ich Herrn Professor Dr. W. HAACK danken.

1. Es sei

(1.1) $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}(u, v) + \varepsilon\,\bar{\mathfrak{a}}(u, v), \quad (\mathfrak{a}^2 = 1,\ \mathfrak{a}\cdot\bar{\mathfrak{a}} = 0,\ \varepsilon = \text{const},\ \varepsilon^2 = 0,\ \mathfrak{a}_u \neq \mu\,\mathfrak{a}_v)$

das nicht-zylindrische Strahlensystem. Die Funktion $\mathfrak{A}$ wird als dreimal stetig differenzierbar vorausgesetzt. Die Bogenlänge des sphärischen Bildes von (1.1) betrachten wir in der Gestalt

(1.2) $$\mathrm{I} \equiv (d\,\mathfrak{a})^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2,$$

wobei

(1.3) $$\alpha_1 = P(u, v)\,du + Q(u, v)\,dv, \quad \alpha_2 = \overline{P}(u, v)\,du + \overline{Q}(u, v)\,dv$$

zwei unabhängige Pfaffsche Formen (also $P\overline{Q} - \overline{P}Q \neq 0$) sind. Wir nehmen an, daß die Hauptflächen von (1.1) den Gleichungen

(1.4) $$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0$$

entsprechen. Mit $\nabla_1 F(u, v)$ bezeichnen wir die Pfaffsche Ableitung der Funktion $F(u, v)$ längs der Kurve $\alpha_2 = 0$ bezüglich der Form α_1. Entsprechende Bedeutung hat $\nabla_2 F(u, v)$. Dann gilt

(1.5) $$\nabla_1\mathfrak{a}\cdot\nabla_2\bar{\mathfrak{a}} + \nabla_2\mathfrak{a}\cdot\nabla_1\bar{\mathfrak{a}} = 0,$$

und die zweite Grundform des Strahlensystems hat die Gestalt

(1.6) $$\mathrm{II} \equiv l\,\alpha_1^2 + n\,\alpha_2^2, \quad \text{mit} \quad l = 2\nabla_1\mathfrak{a}\cdot\nabla_1\bar{\mathfrak{a}}, \quad n = 2\nabla_2\mathfrak{a}\cdot\nabla_2\bar{\mathfrak{a}}.$$

Die Mittenfläche $\mathfrak{m}$ von (1.1) ist ([4], S. 283)

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\times\bar{\mathfrak{a}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathfrak{a}_u\cdot\bar{\mathfrak{a}}_v - \mathfrak{a}_v\cdot\bar{\mathfrak{a}}_u}{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v)}\,\mathfrak{a}.$$

Hieraus erhalten wir

(1.7) $$\mathfrak{m} = \mathfrak{a}\times\bar{\mathfrak{a}} - (\nabla_1\bar{\mathfrak{a}}\cdot\nabla_2\mathfrak{a})\,\mathfrak{a}.$$

Durch jeden Punkt $\mathfrak{m}$ betrachten wir die Ebene $\mathfrak{E}$, die senkrecht auf $\mathfrak{a}$ steht. Die Einhüllende dieser Ebene ist bekanntlich die Mittenhüllfläche $\mathfrak{M}$ des Strahlensystems.

Sind R_1, R_2 die Krümmungsradien einer nicht-abwickelbaren Fläche $\mathfrak{F}$, und ist w der Abstand des Koordinatenursprungs von der Tangentialebene von $\mathfrak{F}$, so gilt bekanntlich die Formel ([1], S. 140)

(1.8) $$\Delta w + 2w = R_1 + R_2.$$

Hierin bedeutet Δ den zweiten Beltramischen Operator bezüglich der dritten Grundform der Fläche $\mathfrak{F}$.

Wir nehmen jetzt an, daß $\mathfrak{M}$ eine reelle Minimalfläche ist. Da wir die zylindrischen Strahlensysteme ausgeschlossen haben, kann $\mathfrak{M}$ nicht abwickelbar sein. $\mathfrak{M}$ ist also keine Ebene. Dann gilt:

(1.9) $\Delta w + 2w = 0$, d.h. $\nabla_1\nabla_1 w + \nabla_2\nabla_2 w - \bar{q}\,\nabla_1 w - q\,\nabla_2 w + 2w = 0.$

Die Größen $q, \bar{q}$ sind durch

$$[d, \alpha_1] = q[\alpha_1, \alpha_2], \quad [d, \alpha_2] = \bar{q}[\alpha_2, \alpha_1]$$

definiert ([12], S. 153). Hierin bedeutet $[d, \alpha_i]$ $(i = 1, 2)$ die äußere Ableitung von α_i, und $[\alpha_1, \alpha_2]$ das äußere Produkt der Formen α_1, α_2. Der Operator Δ ist bezüglich der Form $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ gebildet, da das Gaußsche Bild von $\mathfrak{M}$ mit dem sphärischen Bild des Strahlensystems identisch ist. Berücksichtigen wir, daß

$$w = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{a} \tag{1.10}$$

ist, so finden wir wegen (1.7)

$$w = -\nabla_1 \bar{\mathfrak{a}} \cdot \nabla_2 \mathfrak{a}. \tag{1.11}$$

Die Ableitungsgleichungen eines Strahlensystems sind unter Gebrauch von invarianten Ableitungen in [4], S. 290–291 aufgestellt. Mit unwesentlichen Änderungen lauten sie:

$$\nabla_1 \nabla_1 \mathfrak{a} = q \nabla_2 \mathfrak{a} - \mathfrak{a}, \quad \nabla_1 \nabla_2 \mathfrak{a} = -q \nabla_1 \mathfrak{a}, \quad \nabla_2 \nabla_1 \mathfrak{a} = -\bar{q} \nabla_2 \mathfrak{a}, \quad \nabla_2 \nabla_2 \mathfrak{a} = \bar{q} \nabla_1 \mathfrak{a} - \mathfrak{a}, \tag{1.12}$$

$$\nabla_1 \nabla_1 \bar{\mathfrak{a}} = \frac{\nabla_1 l}{2} \nabla_1 \mathfrak{a} + \left(-\frac{\nabla_2 l}{2} + q l - q n \right) \nabla_2 \mathfrak{a} - l \mathfrak{a} + q \nabla_2 \bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{a}}, \tag{1.13}$$

$$\nabla_1 \nabla_2 \bar{\mathfrak{a}} = \frac{\nabla_2 l}{2} \nabla_1 \mathfrak{a} + \frac{\nabla_1 n}{2} \nabla_2 \mathfrak{a} - q \nabla_1 \bar{\mathfrak{a}}, \tag{1.14}$$

$$\nabla_2 \nabla_1 \bar{\mathfrak{a}} = \frac{\nabla_2 l}{2} \nabla_1 \mathfrak{a} + \frac{\nabla_1 n}{2} \nabla_2 \mathfrak{a} - \bar{q} \nabla_2 \bar{\mathfrak{a}}, \tag{1.15}$$

$$\nabla_2 \nabla_2 \bar{\mathfrak{a}} = \left(-\frac{\nabla_1 n}{2} + \bar{q} n - \bar{q} l \right) \nabla_1 \mathfrak{a} + \frac{\nabla_2 n}{2} \nabla_2 \mathfrak{a} - n \mathfrak{a} + \bar{q} \nabla_1 \bar{\mathfrak{a}} - \bar{\mathfrak{a}}. \tag{1.16}$$

Eine Verallgemeinerung dieser und der zugehörigen Integrabilitätsbedingungen wurde in [15], S. 10–12 dargestellt.

Differenziert man (1.11) und beachtet die Identitäten

$$\mathfrak{a} \cdot \nabla_i \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{a}} \cdot \nabla_i \mathfrak{a} = 0, \quad (i = 1, 2), \tag{1.17}$$

$$\nabla_2 \nabla_1 n - q \nabla_1 n = \nabla_1 \nabla_2 n - \bar{q} \nabla_2 n, \tag{1.18}$$

so findet man unter Benutzung der Ableitungsgleichungen an Stelle von (1.9) die Bedingung

$$\nabla_1 \nabla_2 (l - n) - q \nabla_1 (l - n) - 2\bar{q} \nabla_2 (l - n) - (\nabla_1 q - 2q\bar{q} + \nabla_2 \bar{q})(l - n) = 0. \tag{1.19}$$

Führt man in (1.19) den Grenzpunktabstand $2z$ aus der Gleichung

$$4z = l - n \tag{1.20}$$

ein, so erhält man das Ergebnis: *Die Gleichung*

$$\nabla_1 \nabla_2 z - q \nabla_1 z - 2\bar{q} \nabla_2 z - (\nabla_1 q - 2q\bar{q} + \nabla_2 \bar{q}) z = 0 \tag{1.21}$$

ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Mittenhüllfläche eines nicht-zylindrischen Strahlensystems eine Minimalfläche ist.

Spezialisiert man die Formen α_1, α_2 durch den Ansatz

$$\alpha_1 = \sqrt{E}\,du, \qquad \alpha_2 = \sqrt{G}\,dv \tag{1.22}$$

und rechnet die in (1.21) auftretenden Größen um, so erhält (1.21) die Gestalt

$$z_{uv} + (\log\sqrt{E})_v z_u + (\log\sqrt{G})_u z_v + (\log\sqrt{EG})_{uv} z = 0. \tag{1.23}$$ [1])

Eine Bedingung derselben Gestalt für den Grenzpunktabstand eines Normalensystems gibt BIANCHI ([*1*], S. 279). Dort bedeuten aber $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ die Hauptflächen des Strahlensystems im Sinne von KUMMER.

2. Spezielle Fälle. a) Für ein isotropes Strahlensystem gilt $z = 0$ und folglich ist (1.23) identisch erfüllt. Somit erhält man sofort den Ribaucourschen Satz.

b) Wir betrachten ein nicht-isotropes M-Strahlensystem mit konstantem Grenzpunktabstand. Dann folgt aus (1.23)

$$(\log\sqrt{EG})_{uv} = 0, \tag{2.1}$$

woraus wir erhalten

$$\sqrt{EG} = e^{\varphi(u)+\psi(v)}. \tag{2.2}$$

Somit ist

$$dF_K = \sqrt{EG}\,du\,dv = e^{\varphi(u)+\psi(v)}\,du\,dv \tag{2.3}$$

das Flächenelement der Einheitskugel. Wir setzen

$$e^{\varphi(u)}\,du = dx, \qquad e^{\psi(v)}\,dv = dy \tag{2.4}$$

und erhalten schließlich

$$dF_K = dx\,dy. \tag{2.5}$$

Dies bedeutet: Das sphärische Bild des betrachteten Strahlensystems ist auf die in rechtwinkligen Koordinaten bezogene Ebene in der Weise flächentreu abgebildet, daß die Bilder der Hauptflächen des Strahlensystems den achsenparallelen Geraden in der Ebene entsprechen. Es ist ersichtlich, daß dieses Ergebnis auch für isotrope Strahlensysteme gültig ist, da jedes orthogonale Netz auf der Einheitskugel als Bild der Hauptflächen eines isotropen Strahlensystems betrachtet werden kann.

---

[1]) *Anmerkung bei der Korrektur.* Die M-Strahlensysteme hat auch G. SANNIA in seiner Arbeit „Sull' inviluppata media di una congruenza di rette" [Atti R. Accad. Torino **45**, 56–78 (1909/10)] eingehend untersucht. Dort wird (S. 62) eine notwendige und hinreichende Bedingung für M-Strahlensysteme gegeben, aus der die Bedingung (1.23) hergeleitet werden kann.

Eine flächentreue Abbildung des sphärischen Bildes der Hauptflächen (im Sinne von KUMMER) eines pseudosphärischen Normalensystems auf die Ebene erwähnt BIANCHI ([1], S. 289).

c) Der Grenzpunktabstand eines Strahlensystems S sei konstant. Wir nehmen weiter an, daß es eine flächentreue Abbildung des sphärischen Bildes der Hauptflächen ($u=\text{const}$, $v=\text{const}$) des Strahlensystems auf die in rechtwinkligen Koordinaten bezogene Ebene gibt, bei der den Linien $u=\text{const}$, $v=\text{const}$ die achsenparallelen Geraden in der Ebene entsprechen. Dann ist S ein M-Strahlensystem. In der Tat: u, v deuten wir in der Ebene als rechtwinklige Koordinaten. Da die Abbildung flächentreu ist, folgt

$$\log \sqrt{E\,G} = 0 \tag{2.6}$$

und somit ist (1.23) erfüllt.

3. GUICHARD hat bekanntlich das folgende Problem behandelt: Man bestimme ein Strahlensystem, dessen sphärisches Bild der abwickelbaren Flächen vorgegeben ist. Sind $\bar{u}=\text{const}$, $\bar{v}=\text{const}$ die Bilder der abwickelbaren Flächen und

$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}^2 \tag{3.1}$$

die entsprechende Metrik der Einheitskugel, so ist ([1], S. 280—282) ein Strahlensystem eindeutig bis auf Bewegungen (mittels Quadraturen) bestimmbar, falls eine Lösung $\bar{\varrho}(\bar{u},\bar{v})$ der Differentialgleichung

$$\bar{\varrho}_{\bar{u}\bar{v}} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix} \bar{\varrho}_{\bar{u}} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix} \bar{\varrho}_{\bar{v}} + \left(\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{Bmatrix}_{\bar{u}} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{Bmatrix}_{\bar{v}} + \bar{F} \right) \bar{\varrho} = 0 \tag{3.2}$$

bekannt sei. Hierin sind die Christoffel-Symbole bezüglich der Form (3.1) zu bilden. Der Brennpunktabstand des Strahlensystems wird dann gleich $2\bar{\varrho}$ sein. Ist das vorgegebene Netz orthogonal, so nimmt (3.2) die Gestalt an:

$$\bar{\varrho}_{\bar{u}\bar{v}} + \left(\log \sqrt{\bar{E}}\right)_{\bar{v}} \bar{\varrho}_{\bar{u}} + \left(\log \sqrt{\bar{G}}\right)_{\bar{u}} \bar{\varrho}_{\bar{v}} + \left(\log \sqrt{\bar{E}\,\bar{G}}\right)_{\bar{u}\bar{v}} \bar{\varrho} = 0. \tag{3.3}$$

Sie ist von derselben Gestalt wie (1.23).

Aus diesem Zusammenhang folgt sofort der auf S. 121 unter c) ausgesprochene Satz.

Literatur

[1] BIANCHI, L., u. M. LUKAT: Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig: Teubner 1910. — [2] BLASCHKE, W.: Ein Beitrag zur Liniengeometrie. Rend. Circ. Mathem. Palermo **33**, 247—259 (1912). — [3] BLASCHKE, W.: Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum. Math. Z. **15**, 309—320 (1922). — [4] BLASCHKE, W.: Vorlesungen über Differentialgeometrie, I. New York 1945. — [5] BLASCHKE, W.: Einführung in die Differentialgeometrie. Berlin: Springer 1950. — [6] CARTAN, E.: Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques. Paris: Hermann 1945. — [7] FAVARD, J.: Cours de géométrie différentielle locale. Paris:

Gauthier-Villars 1957. — [8] Haack, W.: Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe I. Math. Z. **40**, 560—581 (1935). — [9] Haack, W.: Differentialgeometrie II. Wolfenbütteler Verlag 1948. — [10] Haack, W.: Die kubische Indikatrix eines Strahlensystems und ihre Entartungen. Arch. der Math. **1**, 454—461 (1948/49). — [11] Haack, W.: Strahlenkomplexe mit integrablen Pfaffschen Differentialformen. Math. Z. **52**, 322—341 (1949). — [12] Haack, W.: Elementare Differentialgeometrie. Basel: Birkhäuser 1955. — [13] Kommerell, K.: Strahlensysteme und Minimalflächen. Math. Ann. **70**, 143—160 (1911). — [14] Ribaucour, A.: Étude des élassoides ou surfaces à courbure moyenne nulle. Mém. cour. Acad. r. d. Belgique **44**, 1—236 (1882). — [15] Stephanidis, N. K.: Deformationen von Strahlensystemen. Diss. Freie Universität Berlin 1958. — [16] Stephanidis, N. K.: Über ein Vektorfeld eines Strahlensystems. Arch. der Math. **10**, 221—225 (1959). — [17] Weingarten, J.: Über die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche. J. reine u. angew. Math. **100**, 296—310 (1887).

Berlin-Tempelhof, Wittekindstr. 42

(Eingegangen am 9. Juli 1959)

DEKKER, J. C. E., and J. MYHILL
Math. Zeitschr. 73, 127–133 (1960)

The Divisibility of Isols by Powers of Primes

By
J. C. E. DEKKER and J. MYHILL

1. Introduction

The reader is assumed to be familiar with the notations, terminology and results of [1] and [2]. Let $p_0, p_1, \ldots$ be the sequence of all positive primes arranged according to size and let $\bar{\varepsilon}$ consist of $0, 1, \ldots$ and the symbol ∞. Every isol X determines a unique sequence $\{v_n\}$ of elements of $\bar{\varepsilon}$ such that for all n

(a) $$v_n \in \varepsilon \Rightarrow p_n^{v_n} | X \;\&\; \text{not}\,(p_n^{v_n+1} | X)$$

(b) $$v_n = \infty \Rightarrow (\forall\, k)\,[p_n^k | X].$$

We denote the smallest ring in which the system $[A, +, \cdot]$ can be embedded by $[A^*, +, \cdot]$ or in short by A^*. Since we have for $n \neq 0$, $X, Y \in A$,

$$n(X - Y) = 0 \Leftrightarrow nX = nY \Leftrightarrow X = Y \Leftrightarrow X - Y = 0,$$

the additive group of A^* is a torsion-free Abelian group. Following the terminology of KUROSH [6, pp. 207, 210] we therefore call the sequence $\{v_n\}$ of elements of $\bar{\varepsilon}$ related to X by (a) and (b) the *characteristic* of X. We mention two examples. If $X_0 \in A - \varepsilon$,

$$\text{char}\,(X_0!) = \{\infty, \infty, \ldots\}$$

$$\text{char}\,(X_0! + 1) = \{0, 0, \ldots\}.$$

Let us consider the following two questions:

(I) Does there exist for each sequence $\{v_n\}$ of elements of $\bar{\varepsilon}$, an isol with $\{v_n\}$ as its characteristic?

(II) Does there exist for each sequence $\{V_n\}$ of isols, an isol X such that for all n

(c) $$p_n^{V_n} | X \;\&\; \text{not}\,(p_n^{V_n+1} | X)$$

The main purpose of this paper is to answer both questions in the affirmative. It clearly suffices to do this for (II). For let $\{v_n\}$ be any sequence of elements of $\bar{\varepsilon}$ and let $X_0 \in A - \varepsilon$. Put

$$V_n = \begin{cases} v_n & \text{for } v_n \in \varepsilon, \\ X_0 & \text{for } v_n = \infty. \end{cases}$$

Now assume that the isol X is related to $\{V_n\}$ by (c). Then

$$v_n = \infty \Rightarrow p_n^{X_n} | X \Rightarrow (\forall k)\,[p_n^k | X],$$

and X has $\{v_n\}$ as its characteristic.

2. The Principal Theorems

THEOREM T 1. *For any function V_n from ε into Λ there exists an isol X such that for all n,*

$$p_n^{V_n} | X \;\&\; \textit{not}\,(p_n^{V_n+1} | X). \tag{1}$$

PROOF. In this proof the word "sequence" will only be used in the sense of an infinite sequence of numbers which is ultimately vanishing, i.e., which has only finitely many non-zero elements. $\{0\}$ stands for the sequence all of whose elements are 0. For each sequence $\{x_n\}$,

$$\{x_n\}^* = \Theta\{x_n\} = \prod_{i \leq k} p_i^{x_i} - 1,$$

where k is any number such that $x_n = 0$ for $n > k$. The mapping Θ maps the collection of all sequences one-to-one onto ε. There clearly exist recursive functions $c(x)$ and $d(n, x)$ such that

$$c(0) = c\left(\{0\}^*\right) = 0$$

$$c\left(\{x_0, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots\}^*\right) = n + 1 \quad \text{for} \quad x_n \neq 0$$

$$d\left(n, \{x_0, x_1, \ldots\}^*\right) = x_n.$$

This implies

$$x = \{x_0, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots\}^* \;\&\; x_n \neq 0 \Rightarrow c(x) \geqq 1 \;\&\; d\left(c(x) - 1, x\right) = x_n, \tag{2}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow c(x) \geqq 1 \;\&\; d\left(c(x) - 1, x\right) \neq 0. \tag{3}$$

With any two sets α and β we associate a set α^β as defined in [2, p. 258]. Using this notation we define a RET X. Let τ be any immune set which does not contain 0 and let t_n be any one-to-one function ranging over τ. Let

$$\xi_n \in V_n, \qquad \pi_n = (0, 1, \ldots, p_n - 1)$$

$$\gamma_n = (0) + j\left((t_n) \times \left(\pi_n^{\xi_n} - (0)\right)\right)$$

$$\xi = \left\{\{x_n\}^* | (\forall i)\,[x_i \in \gamma_i]\right\}, \qquad X = \operatorname{Req} \xi.$$

Thus $\gamma_n \in p_n^{V_n}$ for every n. We first show that X is an isol, i.e., that ξ is isolated. Assume ζ is any non-empty r.e. subset of ξ which does not contain 0. We claim that $c(\zeta)$ is finite. In view of the facts that $0 \notin \zeta$ and $\zeta < \xi$ we obtain by (2) and (3)

$$\begin{cases} x \in \zeta \Rightarrow c(x) \geqq 1 \;\&\; d\left(c(x) - 1, x\right) > 0 \\ x \in \zeta \Rightarrow x \in \xi \Rightarrow d\left(c(x) - 1, x\right) \in \gamma_{c(x)-1} \\ x \in \zeta \Rightarrow k\, d\left(c(x) - 1, x\right) = t_{c(x)-1} \end{cases} \tag{4}$$

Suppose $c(\zeta)$ were infinite. Then $c(\zeta)$ would be an infinite r.e. set and there would exist a recursive function $z(n)$ such that $cz(n)$ is one-to-one and the range of $z(n)$ is included in ζ. We conclude by (4) that $t_{cz(n)-1}$ is a recursive one-to-one function which ranges over a subset of the immune set τ. This is impossible, hence $c(\zeta)$ must be finite. Note that $c(\zeta)$ is a non-empty set which does not contain 0, since this is also true for ζ. Denote the maximum of $c(\zeta)$ by $m+1$. We now have

$$\{x_n\}^* \in \zeta \Rightarrow (\forall n)\,[m < n \Rightarrow x_n = 0]$$

$$\zeta < \left\{\{x_n\}^* \mid x_0 \in \gamma_0 \,\&\, \ldots \,\&\, x_m \in \gamma_m \,\&\, (\forall n)\,[m < n \Rightarrow x_n = 0]\right\}.$$

The set on the right belongs to the isol

$$p_0^{V_0} \cdot p_1^{V_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{V_m}$$

and is therefore isolated. Hence ζ must be finite. Thus X is an isol. We now prove that for every m

(5) $$p_m^{V_m} \mid X.$$

If $V_m = 0$ there is nothing to prove. Assume $V_m \geqq 1$. Put

$$\eta_m = \left\{\{x_n\}^* \mid \{x_n\}^* \in \xi \,\&\, x_m = 0\right\}$$

$$a\left(\{x_n\}^*\right) = j\left(\{x_0, \ldots, x_{m-1}, 0, x_{m+1}, \ldots\}^*, x_m\right).$$

The function $a(x)$ is recursive, one-to-one and maps ξ onto $j(\eta_m \times \gamma_m)$. Putting $Y_m = \operatorname{Req} \eta_m$ we therefore have

$$X = Y_m \cdot p_m^{V_m}$$

which implies (5). It remains to be shown that for every m

(6) $$\text{not } (p_m^{V_m+1} \mid X).$$

If (6) were false these would exist an isol S such that

$$p_m^{V_m+1} \cdot S = p_m^{V_m} \cdot Y_m.$$

This yields $p_m \cdot S = Y_m$ by the cancellation law for multiplication. In other words, there is an isolated set σ and a partial recursive one-to-one function $q(x)$ such that

(7) $$q(\eta_m) = j(\pi_m \times \sigma).$$

A non-empty finite set δ is called *right complete* if $\delta = j(\pi_m \times \sigma_1)$ for some finite set σ_1. A non-empty finite set ϑ is called *left complete* if there exist a number k, numbers $i(0), \ldots, i(k)$, $\bar{t}_{i(0)}, \ldots, \bar{t}_{i(k)}$ and finite sets

$$\bar{\xi}_{i(0)}, \ldots, \bar{\xi}_{i(k)}, \qquad \bar{\pi}_{i(0)}, \ldots, \bar{\pi}_{i(k)}$$

which satisfy the following conditions:

(i) $i(0), \ldots, i(k)$ are distinct from each other *and from* m; also, $t_{i(0)}, \ldots, t_{i(k)}$ are distinct from each other,

(ii) $\bar{\pi}_{i(j)} < \pi_{i(j)}$ for $0 \leqq j \leqq k$,

(iii) for $0 \leqq j \leqq k$, $\max \bar{\pi}_{i(j)} + 1$ is a prime *distinct from* p_m and

$$\max \bar{\pi}_{i(j)} = \bar{p}_j - 1 \Rightarrow \pi_{i(j)} = (0, 1, \ldots, \bar{p}_j - 1),$$

(iv) $$\vartheta = \left\{ \{x_n\}^* \mid x_{i(0)} \in \bar{\gamma}_{i(0)} \,\&\, \ldots \,\&\, x_{i(k)} \in \bar{\gamma}_{i(k)} \,\&\, \Gamma\{x_n\} \right\},$$

where

$$\bar{\gamma}_{i(j)} = (0) + j\left((\bar{t}_{i(j)}) \times \left(\bar{\pi}^{\bar{t}_{i(j)}}_{i(j)} - (0)\right)\right)$$

and where $\Gamma\{x_n\}$ means:

$$(\forall n)\left[n \notin \left(i(0), \ldots, i(k)\right) \Rightarrow x_n = 0\right].$$

For any finite set α we write card α for the number of elements in α. We claim:

(8) $$\begin{cases} \textit{if } \delta \textit{ and } \vartheta \textit{ are finite sets such that} \\ \delta \textit{ is right complete and } \vartheta \textit{ is left complete,} \\ \textit{then card } \delta \neq \textit{card } \vartheta. \end{cases}$$

For under the hypothesis we have

$$\text{card } \delta = p_m \cdot c$$

$$\text{card } \vartheta = p_{r(1)}^{d_1} \cdot \ldots \cdot p_{r(n)}^{d_n},$$

where $c, d_1, \ldots, d_n$ are $\geqq 1$ and $p_{r(1)}, \ldots, p_{r(n)}$ are primes distinct from each other *and from* p_m. Now assume that δ_1 is a finite subset of $j(\pi_m \times \sigma)$ and ϑ_1 a finite subset of η_m. Then there exist finite sets δ and ϑ such that

(9) $$\delta_1 < \delta < j(\pi_m \times \sigma) \quad \text{and } \delta \text{ is right complete,}$$

(10) $$\vartheta_1 < \vartheta < \eta_m \quad \text{and } \vartheta \text{ is left complete.}$$

Moreover, given δ_1 (i.e., by its elements and cardinality) the smallest set δ satisfying (9) can be effectively found; we denote it by $\bar{\delta}_1$. Similarly, given ϑ_1 the smallest set ϑ satisfying (10) can be effectively found; we denote it by $\bar{\vartheta}_1$. Assume $s \in \sigma$. Put

$$\mu_0 = \left(j(0, s)\right), \qquad \lambda_0 = q^{-1}(\bar{\mu}_0),$$

$$\mu_{n+1} = q(\bar{\lambda}_n), \qquad \lambda_{n+1} = q^{-1}(\bar{\mu}_{n+1}),$$

$$\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n.$$

It is readily seen that for all n, $\lambda_n < \bar{\lambda}_n < \lambda_{n+1}$. However, for every n, λ_n has the cardinality of a right complete set and $\bar{\lambda}_n$ the cardinality of a left complete set. Using (8) we see that for every n, λ_n is properly included in λ_{n+1}. We

now obtain a contradiction, since λ would be an infinite r.e., subset of the isolated set η_m. This completes the proof of (6) and thereby of T 1.

An isol X is called *cosimple* if there is a set ξ such that

$$X = \mathrm{Req}\,\xi \quad \text{and} \quad \xi' \text{ is r.e.},$$

i.e., if X can be represented by a set which is finite or the complement of a simple set. The collection of all cosimple isols is denoted by Λ_1. We recall [2, pp. 261, 262] that Λ_1 is denumerable and closed under addition, multiplication, exponentiation and the factorial function. We wish to prove an analogue of T 1 for cosimple isols. The class of all r.e. sets can be effectively generated in a sequence $\{\omega_n\}$; here ω_n is defined as in [5, p. 28].

DEFINITION. A sequence $\{V_n\}$ of cosimple isols is *recursively enumerable* (r.e.), if there is a recursive function $f(n)$ such that $V_n = \mathrm{Req}\,\omega'_{f(n)}$.

THEOREM T 2. *For any r.e. sequence $\{V_n\}$ of cosimple isols there exists a cosimple isol X such that for all n*

$$p_n^{V_n} \mid X \;\&\; \text{not } (p_n^{V_n+1} \mid X).$$

PROOF. This theorem can be proved by a slight modification of the proof of T 1. We shall show that under the additional assumption that $V_n = \mathrm{Req}\,\omega'_{f(n)}$ for some recursive function $f(n)$, the sets $\xi_n \in V_n$ and the function t_n can be chosen in such a manner that the set ξ defined in terms of $\{\xi_n\}$ and t_n as in the proof of T 1 has a r.e. complement. The reader is referred to [3, pp. 357, 358] for the definition of a retraceable set. According to [3, Theorem T 3] there exists an immune set which is retraceable and has a r.e. complement. Let τ_0 be such an immune set with the additional property $0 \notin \tau_0$. We choose t_n as the strictly increasing function which ranges over τ_0 and choose $\xi_n = \omega'_{f(n)}$. We recall [5, p. 28] that a condition $\Phi(x, y)$ on x and y (i.e., a relation between x and y) is r.e. if the set $\{j(x, y) \mid \Phi(x, y)\}$ is r.e. We have

$$\{x_n\}^* \in \xi \Leftrightarrow (\exists\, i)\,[x_i \notin \gamma_i], \tag{11}$$

$$y \notin \gamma_i \Leftrightarrow y \neq 0 \;\&\; [k(y) \neq t_i \text{ or } l(y) = 0 \text{ or } l(y) \notin \pi_i^{\xi_i}]. \tag{12}$$

Clearly,

$$z \notin \pi_i^{\omega'_{f(i)}} \Leftrightarrow \delta_e r_z \notin \omega'_{f(i)} \text{ or } \varrho_e r_z \notin \pi_i \Leftrightarrow (\exists\, y)\,[y \in \delta_e r_z \cdot \omega_{f(i)} \text{ or } y \in \varrho_e r_z \cdot \pi'_i].$$

This shows that the conditions $z \notin \pi_i^{\xi_i}$ and $l(y) \notin \pi_i^{\xi_i}$ are r.e. In view of (11) and (12) we may therefore conclude that ξ' is r.e., provided we can show that $k(y) \neq t_i$ is a r.e. condition on y and i. It therefore suffices to show that $x \neq t_n$ is a r.e. condition on x and n. Since τ_0 is a retraceable set with a r.e. complement, τ_0 has a special retracing function which is recursive [3, Prop. P 5], say $h(x)$. Hence there exists a recursive function $b(x)$ such that

$$b(x) = \mathrm{card}\,(h(x), h^2(x), \dots).$$

This implies

$$x \in \tau_0 \Rightarrow b(x) = \text{card}\,\{z | z \in \tau_0 \,\&\, z < x\}$$

$$x = t_n \Rightarrow b(x) = n$$

$$x = t_n \Leftrightarrow x \in \tau_0 \,\&\, b(x) = n$$

$$x \neq t_n \Leftrightarrow x \in \tau_0' \quad \text{or} \quad b(x) \neq n.$$

It follows that $x \neq t_n$ is a r.e. condition on x and n. Hence ξ' is r.e. and the isol $X = \text{Req}\,\xi$ is cosimple.

3. Concluding Remarks

REMARK A. Let us first consider under which conditions the isol X defined in the proof of T 1 is infinite. This clearly depends only on the nature of the function V_n. If either $V_n \neq 0$ for infinitely many values of n, or V_n is infinite for at least one value of n, the isol X will be infinite. On the other hand, X will be finite if V_n is almost identically zero and has a finite subset of ε as its range. In fact, if $V_n = 0$ for $n > m$ and $V_n = v_n$ for $n \leqq m$

$$X = p_0^{v_0} \cdot \ldots \cdot p_m^{v_m}.$$

We point out that for such a function V_n there also exists an infinite cosimple isol which satisfies the conclusion of T 1. Suppose namely that $Y_0 \in A_1 - \varepsilon$. Then $Y_0! + 1$ is not divisible by any number > 1. Using the fact that

$$a, b \geqq 1 \,\&\, (a, b) = 1 \,\&\, a | b \cdot X \Rightarrow a | X$$

[see *1*, p. 115] one readily proves that the infinite cosimple isol

$$X_0 = p_0^{v_0} \cdot \ldots \cdot p_m^{v_m} \cdot (Y_0! + 1)$$

has the characteristic $\{v_0, \ldots, v_m, 0, 0, \ldots\}$.

REMARK B. If we analyze the way in which (5) was established in the proof of T 1 we observe:

(i) the fact that $p_m^{v_m}$ is a power of a finite prime was not used,

(ii) one can easily strengthen (5) to

$$\text{for every } m, \quad \prod_{n \leq m} p_n^{V_n} | X.$$

Let us now assume that $\{D_n\}$ is any sequence of non-zero isols. Then there exists a sequence $\{\delta_n\}$ of sets such that $0 \in \delta_n \in D_n$ for every n. Putting

$$\bar{\delta}_n = \delta_n - (0), \qquad \gamma_n = (0) + j\left((t_n) \times \bar{\delta}_n\right)$$

$$\xi = \left\{\{x_n\}^* | (\forall i)\,[x_i \in \gamma_i]\right\}, \qquad X = \text{Req}\,\xi$$

it follows that $D_n | X$ for every n. Hence we have: for each sequence $\{D_n\}$ of isols there exists an isol X which is divisible by every isol in the sequence.

In view of (ii) this can be strengthened to: for each sequence $\{D_n\}$ of isols there exists an isol X such that

$$\text{for every } m, \quad \prod_{n \leq m} D_n | X. \tag{13}$$

Similarly we obtain by analyzing the proof of T 2: for each r.e. sequence $\{D_n\}$ of cosimple isols there exists a cosimple isol X such that (13) holds; in fact, given any recursive function $f(n)$ such that $D_n = \operatorname{Req} \omega'_{f(n)}$, we can effectively find a number k such that $X = \operatorname{Req} \omega'_k$ satisfies (13).

References

[1] DEKKER, J. C. E.: Congruences in isols with a finite modulus. Math. Z. **70**, 113–124 (1958). – [2] DEKKER, J. C. E.: The factorial function for isols. Math. Z. **70**, 250–262 (1958). – [3] DEKKER, J. C. E., and J. MYHILL: Retraceable sets. Can. J. Math. **10**, 357–373 (1958). – [4] DEKKER, J. C. E., and J. MYHILL: Recursive equivalence types, monograph, to be published by the University of California Press. – [5] DEKKER, J. C. E., and J. MYHILL: Some theorems on classes of recursively enumerable sets. Trans. Amer. Math. Soc. **89**, 25–59 (1958). – [6] KUROSH, A. G.: The theory of groups, Vol. I, 272 pp. New York: Chelsea Publishing Company 1955. – [7] MYHILL, J.: Recursive equivalence types and combinatorial functions. Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 373–376 (1958).

Institute for Advanced Study, Princeton, U.S.A.
Rutgers, The State University, New Brunswick, N.J., U.S.A.
University of California, Berkeley, U.S.A.

(Eingegangen am 21. Juli 1959)

MacHenry, T.
Math. Zeitschr. 73, 134–145 (1960)

The tensor product and the 2nd nilpotent product of groups

By
TRUEMAN MACHENRY

The principal theorem in this paper is the following:

If A and B are arbitrary groups, then the 2nd nilpotent commutator subgroup of A and B and the tensor product of A and B are (naturally) isomorphic.

$$A \otimes B \overset{q}{\cong} [A, B]^{(2)}.$$

The tensor product of groups is usually defined only for abelian groups [1], however, in what follows this definition will be extended to non-abelian groups in order to give complete generality to the central theorem.

The 2nd nilpotent commutator subgroup[2] is a somewhat innaccurate name we have assigned to the subgroups of particular Golovin products (nilpotent products) which are generated by certain commutators of the product group. The Golovin products themselves are operations defined by O. N. Golovin [5], [6], from the set of i-tuples of groups, i belonging to some index set I, to the set of groups. These products provide a countable sequence of operations as an affirmative answer to the question asked by Kurosch in the first (Russian) edition of *The Theory of Groups*, namely: are there operations, distinct from forming free and direct products, on the set of groups which, like these two operations, have the following properties: (1) the "product" is a group which contains isomorphic copies of its "factors", and is generated by them, that (2) the intersection of any factor with the normal closure of the group generated by the remaining factors is the subgroup containing only the identity, and that (3) the product is associative and commutative? From among these products we single out the *nilpotent products*, and from these, the *2nd nilpotent product of two groups*[3], which we shall hereafter abbreviate to *2nd NPP* of A and B, in the case of groups A and B. The *2nd nilpotent commutator subgroup*, or *2nd NPCS*, is an invariant subgroup of the 2nd NPP, and, in the case that the factors of the product are abelian, is the usual commutator subgroup.

In order to emphasize an interesting property of tensor products of non-abelian groups, and because it is historically justifiable, we shall first prove

[1] However, see [8].
[2] This subgroup is called the metabelian commutator subgroup by Golovin [6].
[3] By Golovin's indexing, these are the 1st nilpotent products [5].

the main theorem for the restricted case where the factors are abelian groups. The interesting theorem concerning the tensor product of non-abelian groups is the theorem which states that such a tensor product is isomorphic to the product of the groups abelianized:

$$A \otimes B \cong A/A' \otimes B/B'.$$

However, this theorem, does not completely reduce the theory of tensor products of non-abelian groups to that of abelian groups. In a paper to follow shortly, we shall show that the behaviour of the generalized tensor product with respect to exact sequences differs somewhat from that of the tensor product defined on abelian groups.

In the present paper we shall show that it is impossible to extend the Main Theorem to an analogous theorem for tensor products and 2nd NPCS of more than two groups.

The results in this paper first appeared in a thesis written as part fulfillment of the requirements for the degree of M. Sc. at the University of Manchester. The idea for the isomorphism is the result of a remark made by B. H. NEUMANN.

I should like to express my deep gratitude to Professor PETER HILTON, under whose supervision the work was done, for his help and advice.

I. Preliminary lemmas and theorems and the definitions of NPP and NPCS

First, we mention a few lemmas, for the most part well-known[4]), concerning commutator subgroups.

As usual $[A, A]$ is the *commutator subgroup* of A, i.e., the group generated by all elements $[a, b]=a^{-1}b^{-1}ab$, $a, b \in A$. If $G=\{A, B\}$, the *group generated by its subgroups A and B*, then $[A, B]_G$ is the group generated by all elements $[a, b]$ $a \in A$, $b \in B$. In particular, we have $[G, A]_G=\{[g, a], g \in G, a \in A, A \subseteq G\}$, is the *principal commutator subgroup* of G with respect to A.

Then let $G=\{A, B\}$.

LEMMA 1[5]). $[A, B]_G$ *is normal in* G.

Since $G=\{G, [A, B]\}$, it follows from lemma 1 that

LEMMA 2. $[G, [A, B]]$ *is normal in* G.

In fact $[G, [\ldots, [G, [A, B]] \ldots]]$ is normal in G.

LEMMA 3. $[G, [A, B]]$ *is normal in* $[A, B]$.

More generally, $[G, \ldots, [G, [A, B]] \ldots]$ is normal in $[A, B]$.

Next, consider the particular group generated by its subgroups A and B, the *free product* of A and B, denoted by $F=A * B$. We shall call the subgroup $[A, B]_F$, the *free commutator subgroup* of F. With respect to the free commutator subgroup of F we have the following important.

[4]) Cf., e.g., KUROSCH [7], GOLOVIN [5], p. 93, lemma 3.1 ct. seq.

[5]) See GOLOVIN [5], p. 93, lemma 3.1.

THEOREM 4[6]). *If A and B are arbitrary groups, then the free commutator subgroup $[A, B]_F$ of the free product $F = A * B$ is a free group, and the elements $[a, b]$ for all $a \in A$, $b \in B$ $a, b \neq 1$ constitute a set of free generators.*

This theorem has been proved by GOLOVIN[6]) and, for a more general case, by BENADO[6]). The proof is by induction on the length of the words in $[A, B]_F$, and depends on the fact that if the product $[a_{k-1}, b_{k-1}]^{\varepsilon_{k-1}} [a_k, b_k]^{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k = \pm 1$, where these factors are not mutually inverse, occurs in a word of $[A, B]_F$, then for $\varepsilon_{k-1} = \varepsilon_k$ there is no cancellation, and for $\varepsilon_{k-1} = -\varepsilon_k$, we get cancellation only if, for example, $b_k = b_{k-1}$, but then, by hypothesis $a_k \neq a_{k-1}$, so no further cancellation is possible.

If we write the commutator subgroup $[F, \ldots, [F, [A, B]] \ldots]$ (which, as we mention in the remark following lemma 3, is a normal subgroup of $[A, B]_F$) as $[F^{(k)}, [A, B]]$ [7]), then we have the following

DEFINITION 5. *The k-th nilpotent product of two groups A and B is the group*

$$F/[F^{(k-1)}, [A, B]], \qquad F = A * B.$$

DEFINITION 6. *The commutator subgroup of the k-th nilpotent product of two groups A and B is the group*

$$[A, B]_F/[F^{(k-1)}, [A, B]].$$

In particular, the 2nd NPP of two groups A and B is the factor group

$$F/[F, [A, B]],$$

and the 2nd NPCS is

$$[A, B]_F/[F, [A, B]].$$

Denote $[A, B]_F/[F, [A, B]]$ by $[A, B]^{(2)}$.

Since $[A, B]^{(2)}$ is a factor group of the free commutator subgroup $[A, B]_F$, and since $[A, B]_F$ is (freely) generated by commutators of the form $[a, b]$, $a \in A$, $b \in B$, it is clear that the homomorphic images of the elements $[a, b]$ under the canonical epimorphism ϑ

$$[A, B]_F \xrightarrow{\vartheta} [A, B]_F/[F, [A, B]]$$

constitute a set of generators for $[A, B]^{(2)}$. These "canonical generators" will be denoted by symbols (a, b), $a \in A$, $b \in B$. We observe that in definition 6 $[A, B]^{(2)}$ lies in the centre of the 2nd NPP of A and B. Hence, $[A, B]^{(2)}$ is an abelian group. Its generators have the following interesting properties.

Choose from $[A, B]^{(2)}$ the generating elements (a_1, b) and (a_2, b). Consider from among their pre-images under the canonical epimorphism, the commutators $[a_1, b]$ and $[a_2, b]$. Then

$$\begin{aligned}[a_1, b]\,[a_2, b] &= a_1^{-1} b^{-1} a_1 b\, a_2^{-1} b^{-1} a_2 b \\ &\overset{\vartheta}{=} a_2^{-1} a_1^{-1} b^{-1} a_1 b\, b^{-1} a_2 b = a_2^{-1} a_1^{-1} b^{-1} a_1 a_2 b,\end{aligned}$$

[6]) GOLOVIN, [5] p. 103, theorem 1.14 and remark 1.15; BENADO [1], theorem 4.4.

[7]) We shall usually omit the subscript F from $[F^{(k)}, [A, B]]_F$; however, it is to be understood that these groups are subgroups in the free product F.

where the congruence is obtained by commuting commutators with elements of F; this is possible because $[F, [A, B]]$ belongs to the kernel of the epimorphism ϑ. Under ϑ the element $a_2^{-1}a_1^{-1}b^{-1}a_1a_2b = [a_1a_2, b]$ determines the element (a_1a_2, b) of $[A, B]^{(2)}$. Thus we have the relation

$$(1.1) \qquad (a_1, b)\,(a_2, b) = (a_1 a_2, b), \qquad a_1, a_2 \in A, \quad b \in B.$$

Similarly,

$$(1.2) \qquad (a, b_1)\,(a, b_2) = (a, b_1 b_2), \qquad a \in A, \ b_1, \ b_2 \in B.$$

If we denote the identity of $[A, B]^{(2)}$ by 1, then

$$(1.3) \qquad (1, b) = (a, 1) = 1, \qquad a \in A, \qquad b \in B,$$

where the 1's inside the brackets are the respective identities of the groups A and B.

Using the relations (1.1), (1.2), (1.3) we deduce

$$(a, b)\,(a^{-1}, b) = (a\,a^{-1}, b) = (1, b) = 1,$$

and

$$(a, b)\,(a, b^{-1}) = (a, b\,b^{-1}) = (a, 1) = 1.$$

Therefore,

$$(1.4) \qquad (a, b)^{-1} = (a^{-1}, b) = (a, b^{-1}).$$

We also derive the following relation: again choose preimages $[a_1, b]$ and $[a_2, b]$ of the canonical generators (a_1, b) and (a_2, b), then

$$\begin{aligned}[a_1, b]\,[a_2, b] &= a_1^{-1}b^{-1}\,a_1\,b\,a_2^{-1}\,b^{-1}\,a_2\,b \\ &\overset{\vartheta}{=} a_1^{-1}b^{-1}\,b\,a_2^{-1}\,b^{-1}\,a_2\,a_1\,b \\ &= a_1^{-1}a_2^{-1}\,b^{-1}\,a_2\,a_1\,b \\ &= [a_2 a_1, b].\end{aligned}$$

Therefore,

$$(a_1, b)\,(a_2, b) = (a_2 a_1, b), \qquad a_1, a_2 \in A, \quad b \in B.$$

Recalling (1.1), we have

$$(1.5) \qquad (a_1, a_2 b) = (a_2 a_1, b), \qquad a_1, a_2 \in A, \quad b \in B.$$

Similarly,

$$(1.6) \qquad (a, b_1 b_2) = (a, b_2 b_1), \qquad a \in A, \quad b_1, b_2 \in B.$$

We should also like to point out that the fact that $[A, B]^{(2)}$ is abelian can be deduced directly from the relations (1.1) and (1.2), thus for $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$

$$\begin{aligned}(a_1 a_2, b_2 b_1) &= (a_1, b_2 b_1)\,(a_2, b_2 b_1) \\ &= (a_1, b_2)\,(a_1, b_1)\,(a_2, b_2)\,(a_2, b_1);\end{aligned}$$

on the other hand

$$(a_1a_2, b_2b_1) = (a_1a_2, b_2)\,(a_1a_2, b_1)$$
$$= (a_1, b_2)\,(a_2, b_2)\,(a_1, b_1)\,(a_2, b_1)\,.$$

Therefore,

$$(a_1, b_1)\,(a_2, b_2) = (a_2, b_2)\,(a_1, b_1)\,. \tag{1.7}$$

It is also clear from (1.1) and (1.2) that if A and B are cyclic groups then so is $[A, B]^{(2)}$.

We summarize the results (1.1) through (1.7) in

THEOREM 7. *If A and B are arbitrary groups and if $a_1, a_2, a \in A$; $b_1, b_2, b \in B$; then in the 2nd NPCS, $[A, B]^{(2)}$*

(i)
$$(a_1, b)\,(a_2, b) = (a_1a_2, b)\,,$$
$$(a, b_1)\,(a, b_2) = (a, b_1b_2)\,;$$

(ii) the identity is $(a, 1) = (1, b)$,

the inverse of (a, b) is

$$(a^{-1}, b) = (a, b^{-1}) = (a, b)^{-1};$$

(iii) if $c_1, c_2 \in [A, B]^{(2)}$, then $c_1c_2 = c_2c_1$.

II. Definition of the tensor product of abelian groups and the Main Theorem for abelian groups

DEFINITION 8. *The tensor product of two abelian groups*[8] *A and B is the group generated by pairs $\{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$, with the relations*

$$\{a_1, b\}\{a_2, b\} = \{a_1a_2, b\}, \qquad a, a_1, a_2 \in A, \tag{2.1}$$

$$\{a, b_1\}\{a, b_2\} = \{a, b_1b_2\}, \qquad b, b_1, b_2 \in B. \tag{2.2}$$

The tensor product of abelian groups A and B will be written $A \otimes B$ and its generators will be written $a \otimes b$, as usual. (2.1) and (2.2) become

$$(a_1 \otimes b)\,(a_2 \otimes b) = a_1a_2 \otimes b, \tag{2.3}$$

$$(a \otimes b_1)\,(a \otimes b_2) = a \otimes b_1b_2. \tag{2.4}$$

The tensor product of two abelian groups is an abelian group. The proof is a repetition of the argument proving (1.7).

Since $[A, B]^{(2)}$ is generated by pairs (a, b), $a \in A$, $b \in B$, and has among its relations (1.1) and (1.2), from (2.1) and (2.2) we conclude that

REMARK 9. *If A and B are abelian groups then there exists a homomorphism*

$$\lambda\colon\ A \otimes B \to [A, B]^{(2)}$$

defined by $(a \otimes b)\lambda = (a, b)$. λ is onto.

[8] See EILENBERG and STEENROD [4], pp. 140–147.

Next we shall show that λ is $[1-1]$. To do this we define a homomorphism from the free commutator subgroup $[A, B]_F$ onto the tensor product $A \otimes B$, where A and B are abelian groups.

Let $\varphi' : [A, B]_F \to A \otimes B$ be a function defined on the generators of $[A, B]_F$ by

$$[a, b]\,\varphi' = a \otimes b, \qquad a \in A, \quad b \in B.$$

Since $[A, B]_F$ is a free group (theorem 4) φ' can be extended uniquely to a homomorphism, which we shall also denote by φ', of $[A, B]_F$ onto $A \otimes B$.

LEMMA 10. *The subgroup* $[F, [A, B]]$ *of* $[A, B]_F$ *belongs to the kernel of* φ'.

PROOF. If $f \in F = A * B$, then there exists a unique representation of f of the form

$$f = a\,b\,u, \qquad a \in A, \quad b \in B, \quad u \in [A, B]_F\text{[9]}.$$

Let h be a generator of the subgroup $[F, [A, B]]$. Then h is of the form

$$h = f^{-1} u^{-1} f u, \qquad f \in F, \quad u \in [A, B]_F.$$

Representing f by $a_1 b_1 u_1$ we have

$$h = u_1^{-1} b_1^{-1} a_1^{-1} u^{-1} a_1 b_1 u_1 u.$$

We must show that $h\varphi' = 1$.

First, we assert that the image under φ' of $b_1^{-1} a_1^{-1} u^{-1} a_1 b_1$ is the same as the image of u^{-1}. It is enough to prove this assertion when u^{-1} is a generator $[a_0, b_0]$ of $[A, B]_F$.

If $x \in A$, then

$$\begin{aligned}\left(x^{-1}[a_0, b_0]\,x\right)\varphi' &= \left([a_0 x, b_0]\,[x, b_0]^{-1}\right)\varphi' \\ &= (a_0 x \otimes b_0)\,(x^{-1} \otimes b_0) \\ &= a_0 \otimes b_0 \\ &= [a_0, b_0]\,\varphi'.\end{aligned}$$

Similarly, if $y \in B$, then

$$\left(y^{-1}[a_0, b_0]\,y\right)\varphi' = [a_0, b_0]\,\varphi'.$$

Therefore,

$$(b_1^{-1} a_1^{-1} u^{-1} a_1 b_1)\,\varphi' = u^{-1}\varphi'.$$

Hence,

$$\begin{aligned}h\varphi' &= (u_1^{-1}\varphi')\left((b_1^{-1} a_1^{-1} u^{-1} a_1 b_1)\,\varphi'\right)(u_1\varphi')\,(u\varphi') \\ &= (u_1^{-1}\varphi')\,(u^{-1}\varphi')\,(u_1\varphi')\,(u\varphi') \\ &= [u_1\varphi', u\varphi'] \\ &= 1.\end{aligned}$$

The last equality is because $A \otimes B$ is abelian.

COROLLARY 11. *From lemma 10 it follows that* φ' *induces a homomorphism* φ *of* $[A, B]^{(2)}$ *onto* $A \otimes B$.

[9]) See GOLOVIN [5], p. 101, theorem 1.2 and p. 104, theorem 1.8. The existence of such a representation follows because F is generated by A and B; the uniqueness, because $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = 1$.

We observe that the composition of the homomorphism of theorem 9 and the homomorphism of corollary 11 have the properties:

$$(a, b)\, \varphi\, \lambda = (a \otimes b)\, \lambda = (a, b),$$

so that $\varphi\lambda = 1$. Similarly, $\lambda\varphi = 1$. Therefore,

THEOREM 12. φ is an isomorphism of $[A, B]^{(2)}$ onto $A \otimes B$ for all abelian groups A and B.

REMARK 13. It is clear that φ is a "natural" isomorphism in the obvious sense. In connection with this statement we should like to emphasize the functorial[10]) nature of the tensor product. That is, if $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ are homomorphisms

$$\alpha\colon A \to A', \qquad \alpha'\colon A' \to A'',$$
$$\beta\colon B \to B', \qquad \beta'\colon B' \to B'',$$

and if $\alpha \otimes \beta$ and $\alpha' \otimes \beta'$ are the maps defined by

$$(a \otimes b)\,(\alpha \otimes \beta) = a\alpha \otimes b\beta$$

and

$$(a' \otimes b')\,(\alpha' \otimes \beta') = a'\alpha' \otimes b'\beta',$$

then $\alpha \otimes \beta$ and $\alpha' \otimes \beta'$ are homomorphisms, and

$$(\alpha \otimes \beta)\,(\alpha' \otimes \beta') = \alpha\alpha' \otimes \beta\beta'\colon \quad A \otimes B \to A'' \otimes B''.$$

Hence, $\otimes$ is a covariant functor[11]) from the category of pairs of abelian groups to the category of abelian groups.

III. Definition of the tensor product of arbitrary groups and the Main Theorem for arbitrary groups

DEFINITION 14. *Let A and B be arbitrary groups. The tensor product of A and B shall be the group generated by all pairs $\{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$, with relations*

$$\{a_1 a_2, b\} = \{a_1, b\}\{a_2, b\}, \qquad a, a_1, a_2 \in A, \tag{3.1}$$

$$\{a, b_1 b_2\} = \{a, b_1\}\{a, b_2\}, \qquad b, b_1, b_2 \in B. \tag{3.2}$$

Since

$$\{1, b\}\{a, b\} = \{a, b\}\{1, b\} = \{a, b\},$$

and

$$\{a, 1\}\{a, b\} = \{a, b\}\{a, 1\} = \{a, b\},$$

the element

$$\{a, 1\} = \{1, b\} \tag{3.3}$$

is a two sided identity and will be written simply 1.

[10]) See EILENBERG and STEENROD [4], p. 141.
[11]) See CARTAN-EILENBERG [2], p. 20.

Since $\{a, b\}\{a^{-1}, b\} = \{1, b\} = 1$, it follows that

$$\{a^{-1}, b\} = \{a, b^{-1}\}. \tag{3.4}$$

Similarly,

$$\{a, b^{-1}\} = \{a, b^{-1}\}.$$

The generators of the tensor product of groups A and B will be written $a \otimes b$ and the group itself as $A \otimes B$. The relations (3.1) and (3.2) may be rewritten

$$(a_1 \otimes b)(a_2 \otimes b) = a_1 a_2 \otimes b, \tag{3.5}$$

$$(a \otimes b_1)(a \otimes b_2) = a \otimes b_1 b_2. \tag{3.6}$$

THEOREM 15. *$A \otimes B$ is an abelian group for all groups A and B.*

The proof of this theorem also uses the same argument as that from which we deduced (1.7).

DEFINITION 16. We define a map

$$\alpha \otimes \beta\colon\ A \otimes B \to A' \otimes B',$$

where α and β are homomorphisms

$$A \xrightarrow{\alpha} A',$$

$$B \xrightarrow{\beta} B',$$

and A, A', B, B' are arbitrary groups, in the same way as is usually done for abelian groups. That is, we note that the map

$$\{a, b\} \to \{a\alpha, b\beta\}$$

defines a homomorphism γ_0 of the free group T generated by all pairs $\{a, b\}$, $a \in A$, $b \in B$, into the free group T' generated by pairs $\{a', b'\}$, $a' \in A'$, $b' \in B'$, which takes the subgroup T_0 generated by all elements of the form

$$\{a_1 a_2, b\}\{a_1, b\}^{-1}\{a_2, b\}^{-1}, \qquad a, a_1, a_2 \in A,$$

and

$$\{a, b_1 b_2\}\{a, b_2\}^{-1}\{a, b_2\}^{-1}, \qquad b, b_1, b_2 \in B,$$

into the subgroup T_0' generated by all elements of the form

$$\{a_1' a_2', b'\}\{a_1', b'\}^{-1}\{a_2', b'\}^{-1}, \qquad a', a_1', a_2' \in A',$$

and

$$\{a', b_1' b_2'\}\{a', b_1'\}^{-1}\{a', b_2'\}^{-1}, \qquad b', b_1', b_2' \in B'.$$

Thus γ_0 induces a homomorphism γ of $T/T_0 \to T'/T_0'$, i.e., of $A \otimes B \to A' \otimes B'$. As in the abelian case we use the symbol $\alpha \otimes \beta$ to denote γ.

If $\beta\ (= 1)$ is the identity homomorphism of $B \xrightarrow{1} B$, then the homomorphism $A \xrightarrow{\alpha} A'$ is said to induce the homomorphism

$$\alpha \otimes 1\colon\ A \otimes B \to A' \otimes B.$$

A similar statement holds if $\alpha = 1$.

With an exception to be discussed in another paper the following theorem reduces the study of the tensor product of arbitrary groups to the study of the tensor product of abelian groups.

THEOREM 17. *If A and B are two groups, not necessarily abelian, and if A' and B' are the commutator subgroups of A and B then*

$$A \otimes B \cong A/A' \otimes B/B'.$$

PROOF. First we consider the monomorphisms

$$i\colon\ A' \to A,$$
$$j\colon\ B' \to B.$$

We assert that $\mathrm{im}(i \otimes 1)$ and $\mathrm{im}(1 \otimes j)$ are both equal 1 in $A \otimes B$, where $\mathrm{im}(i \otimes 1)$ and $\mathrm{im}(1 \otimes j)$ are the images of the maps induced by i and j, that is, the subgroups of $A \otimes B$ generated by $\{a' \otimes b\colon\ a' \in A',\ b \in B\}$ and $\{a \otimes b'\colon\ a \in A,\ b' \in B'\}$. We shall write these subgroups as $(A' \otimes B)\bar{i}$ and $(A \otimes B')\bar{j}$, so that our assertion is

$$(A' \otimes B)\,\bar{i} = 1, \tag{3.7}$$

$$(A \otimes B')\,\bar{j} = 1. \tag{3.8}$$

It is enough to show that $a'i \otimes b = 1$ and $a \otimes b'j = 1$ for any generators a', b' of A', B' and any elements a, b of A, B.

Let a_1 and a_2 be arbitrary elements of A, b an arbitrary element of B, then by theorem 15

$$(a_1 \otimes b)(a_2 \otimes b) = (a_2 \otimes b)(a_1 \otimes b),$$

so by (3.4) and (3.3) we have

$$(a_1^{-1} \otimes b)(a_2^{-1} \otimes b)(a_1 \otimes b)(a_2 \otimes b) = 1,$$

and

$$a_1^{-1} a_2^{-1} a_1 a_2 \otimes b = 1.$$

so that $[a_1, a_2] \otimes b = 1$, therefore,

$$(A' \otimes B)\,\bar{i} = 1;$$

similarly,

$$(A \otimes B')\,\bar{j} = 1.$$

Now, consider the natural epimorphisms

$$\alpha\colon\ A \to A/A',$$
$$\beta\colon\ B \to B/B',$$

and functions

$$\lambda_A\colon\ A/A' \to A,$$
$$\lambda_B\colon\ B/B' \to B,$$

where λ_A is a function which assigns to a coset of A modulo A' an element of that coset; λ_B is defined similarly.

Moreover, consider the free groups T and T_0 (see definition 18) and the free groups S and S_0, where S is the free group generated by pairs $\{\bar{a}, \bar{b}\}$, $\bar{a} \in A/A'$, $\bar{b} \in B/B'$, and S_0 is the subgroup of S generated by all elements of the form

$$\{\bar{a}_1 \bar{a}_2, \bar{b}\}\,\{\bar{a}_1, \bar{b}\}^{-1}\{\bar{a}_2, \bar{b}\}^{-1},$$
$$\{\bar{a}, \bar{b}_1 \bar{b}_2\}\,\{\bar{a}, \bar{b}_2\}^{-1}\{\bar{a}, \bar{b}_2\}^{-1}.$$

Since S is free the function $\lambda' = (\lambda_A, \lambda_B)$ defined by

$$\{\bar{a}, \bar{b}\}\,\lambda' = \{\bar{a}\,\lambda_A, \bar{b}\,\lambda_B\},$$

where $\{a, b\}$ is a generator of S, can be extended uniquely to a homomorphism of $S \to T$ which will also be denoted by λ'. But $S_0\lambda' \subseteq T_0$, therefore λ' induces a homomorphism

$$\lambda\colon\ S/S_0 \to T/T_0,$$

that is, a homomorphism

$$A/A' \otimes B/B' \to A \otimes B.$$

Let

$$\mu = \alpha \otimes \beta\colon\ A \otimes B \to A/A' \otimes B/B'.$$

Clearly, $\lambda\,\mu = 1$.

On the other hand, choose a generator $a \otimes b$ of $A \otimes B$, $a \in A$, $b \in B$, and consider its image under $\mu\,\lambda$,

$$\begin{aligned}(a \otimes b)\,\mu\,\lambda &= (\bar{a} \otimes \bar{b})\,\lambda \\ &= (a_0 \otimes b_0),\end{aligned}$$

where $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, $\bar{a} \in A/A'$, $\bar{b} \in B/B'$. But $a_0 = aa'$, and $b_0 = bb'$, for some $a' \in A'$ and $b' \in B'$. Thus

$$\begin{aligned}a_0 \otimes b_0 &= a\,a' \otimes b\,b' \\ &= (a \otimes b)\,(a' \otimes b)\,(a \otimes b')\,(a' \otimes b').\end{aligned}$$

But by (3.7) and (3.8) the images of $A' \otimes B$ and $A \otimes B'$ in $A \otimes B$ are 1, therefore

$$a_0 \otimes b_0 = a \otimes b,$$

and, hence, $\mu\,\lambda = 1$. Therefore, μ and λ are isomorphisms. This completes the proof of theorem 19.

The proofs of theorem 9 and lemma 10 and, hence, of theorem 12 can be imitated exactly when the requirement that A and B be abelian is dropped. For example, lemma 10 depends on $A \otimes B$ being an abelian group. By theorem 15 this is still the case when A and B are not abelian. Therefore, we have the more general

THEOREM 18. *For all groups A and B*

$$[A, B]^{(2)} \overset{\varphi}{\sim} A \otimes B.$$

Recalling remark 13, we can easily see that $\otimes$ and $[\ ]^{(2)}$ are functors, this time from the category of pairs of groups to the category of abelian groups.

REMARK 19. *φ is a natural isomorphism from the category of pairs of groups to the category of abelian groups.*

IV. Some remarks about tensor products and NPP's for more than two groups

The tensor product of n arbitrary groups A_i, $i>2$, denoted by $\underset{n}{\otimes} A_i$, can be defined in the same way as is usually done for abelian groups, that is, as the group generated by ordered n-tuples of elements, one from each group, with n multilinear relations. The operation of taking the tensor product of n groups is commutative and associative, that is, $\underset{n}{\otimes} A_i$ is isomorphic to the tensor product of any permutation of the n factors A_i, and

$$\left(\overset{p}{\underset{i=1}{\otimes}} A_i\right) \otimes \left(\overset{n}{\underset{i=p+1}{\otimes}} A_i\right) \cong \underset{n}{\otimes} A_i$$

for all p such that $1 \leqq p \leqq n$, and the group $\underset{n}{\otimes} A_i$ is abelian. Furthermore, it is not hard to show that theorem 17 generalizes; that

$$\underset{n}{\otimes} A_i \cong \underset{n}{\otimes} A_i / A_i' = \underset{n}{\otimes} \bar{A}_i.$$

The 2nd-NPP of n groups is defined to be the factor group

$$F/[F, \overline{[A_i]}],$$

where $F = A_1 * A_2 * \cdots * A_n$, and $\overline{[A_i]}$ is the normal closure in F of the group generated by all commutators $[a_j, a_k]$, $a_j \in A_j$, $a_k \in A_k$, $j \neq k$, j, k ranging over all integers from 1 to n. $[A_i]$ is not, in general, isomorphic to $\overline{[A_i]}$.

The 2nd-NPCS of n groups is the factor group

$$[A_i]^{(2)} = \overline{[A_i]} \cdot [F, \overline{[A_i]}] / [F, \overline{[A_i]}].$$

It might be asked, then, if $\underset{n}{\otimes} A_i$ and $[A_i]^{(2)}$ are isomorphic for $n>2$. The answer is that they are not. To show this we mention a theorem due to GOLOVIN [12], which states that the 2nd NPCS of n groups A_i can be decomposed into the direct product of 2nd NPCS of pairs of groups, A_j, A_k, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, that is,

$$[A_i]^{(2)} \cong \prod_{j,k}^{*}{}_{j+k} [A_j, A_k]^{(2)}.$$

On the other hand, $\underset{p}{\otimes} A_i$ is not, in general, a subgroup of $\underset{q}{\otimes} A_i$, $p<q$. For example, we may have $A_1 \otimes A_2 \otimes A_3 = 0$, while $A_1 \otimes A_2 \neq 0$.

However, we state, without proof, the following relation between $\underset{3}{\otimes} A_i$ and factor groups of subgroups of the free product of the A_i.

---

[12]) GOLOVIN [6], p. 126, theorem 15.

THEOREM 20. *Let A, B, C be three groups, then*

$$A \otimes B \otimes C \cong [A, [B, C]]_F / (N^F \cap [A, [B, C]])\, [F, [A, [B, C]]],$$

where $F = A * [B, C]$, $N = [B * C, [B, C]]$.

Because of the associativity and commutivity of the tensor product a similar isomorphism holds when the roles of the groups A, B and C are interchanged, for example, when the group $[A, [B, C]]$ is replaced by $[B, [A, C]]$. F is then $B * [A, C]$ and N is $[A * C, [A, C]]$.

Finally, we mention that theorem 18 can easily be extended to the case of groups with operators.

Bibliography

[1] BENADO, M.: Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. GOLOVIN, I. Mathem. Nachr. **14**, 213–234 (1955). — [2] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton University Press 1955. — [3] EILENBERG, S., and S. MACLANE: Natural Isomorphisms in Group Theory. Proc. Nat. Acad. Sci. **28**, 537–543 (1942). — [4] EILENBERG, S., and N. STEENROD: Foundation of Algebraic Topology. Princeton University Press 1952. — [5] GOLOVIN, O. N.: Nilpotent products of groups. Amer. Math. Soc. Translations **2**, ser. 2, 89–115 (1956). Originally printed in Mat. Sbornik **27**, (69) 427–454 (1950). — [6] GOLOVIN, O. N.: Metabelian products of groups. Amer. Math. Soc. Translations **2**, ser. 2, 117–131 (1956). Originally printed in Mat. Sbornik **28** (70), 431–444 (1951). — [7] KUROSCH, A. G.: Theory of Groups. vols. I and II. Chelsea, New York 1956. — [8] WHITNEY, H.: Tensor products of abelian groups. Duke Math. J. **3**, 495–528 (1937).

Dept. of Math., Rutgers University, New Brunswick (USA)

(Eingegangen am 21. Juli 1957)

WIELANDT, H.
Math. Zeitschr. 73, 146–158 (1960)

Beziehungen zwischen den Fixpunktzahlen von Automorphismengruppen einer endlichen Gruppe

Von

HELMUT WIELANDT

1. Fragestellung. RICHARD BRAUER hat kürzlich[1]) auf eine Beziehung hingewiesen, die zwischen den Fixpunktzahlen von vertauschbaren involutorischen Automorphismen einer Gruppe $\mathfrak{H}$ von ungerader Ordnung h besteht: Wenn die Automorphismengruppe von $\mathfrak{H}$ eine Vierergruppe $\mathfrak{G}_0$ enthält und wenn die in $\mathfrak{G}_0$ enthaltenen Untergruppen der Ordnung 2 mit $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \mathfrak{G}_3$ bezeichnet werden und allgemein f_ν die Anzahl der Fixpunkte von $\mathfrak{G}_\nu$ in $\mathfrak{H}$ bedeutet, so ist

$$f_1 f_2 f_3 = f_0^2 h. \tag{1.1}$$

Die vorliegende Arbeit ist aus dem Wunsch entstanden, dieses merkwürdige Ergebnis in einen allgemeineren Zusammenhang einzuordnen; sie kann als Beitrag zu einer sich gegenwärtig anbahnenden Weiterentwicklung der Darstellungstheorie angesehen werden, bei der beliebige Gruppen $\mathfrak{H}$ als „Darstellungsmoduln" an die Stelle der Vektorräume treten.

Gegeben seien zwei Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$; sie seien endlich, wie alle in dieser Arbeit auftretenden Gruppen. Wir sagen kurz, $\mathfrak{G}$ sei *auf* $\mathfrak{H}$ *dargestellt*, wenn jedem Paar von Elementen $G \in \mathfrak{G}$, $H \in \mathfrak{H}$ eindeutig ein $H^G \in \mathfrak{H}$ zugeordnet ist, derart, daß stets

$$(H_1 H_2)^G = H_1^G H_2^G, \qquad H^{(G_1 G_2)} = (H^{G_1})^{G_2}, \qquad H^1 = H$$

ist (also $\mathfrak{G}$ eine Gruppe von Operatoren von $\mathfrak{H}$).

Wir nennen eine Teilmenge $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{H}$ *fest bei* $\mathfrak{G}$, wenn für $K \in \mathfrak{K}$ und $G \in \mathfrak{G}$ stets $K^G \in \mathfrak{K}$ ist. Die Fixpunkte von $\mathfrak{G}$ sind die bei $\mathfrak{G}$ festen Elemente von $\mathfrak{H}$; sie bilden eine Untergruppe $\mathfrak{H}_\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{H}$. Wir fragen: *Welche algebraischen Beziehungen bestehen zwischen den Fixpunktzahlen* $f_\nu = |\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}|$ *gegebener Untergruppen* $\mathfrak{G}_\nu$ *von* $\mathfrak{G}$? Dabei denken wir uns, wie in dem von BRAUER betrachteten Fall, die Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$ festgehalten, aber $\mathfrak{H}$ innerhalb einer geeigneten unendlichen Familie von Gruppen veränderlich.

Die gestellte Frage läßt sich mit überraschender Vollständigkeit beantworten, wenn man sich auf Untergruppen $\mathfrak{G}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ beschränkt, deren *Darstellung auf* $\mathfrak{H}$ *prim* ist im folgenden Sinn:

(1.2) I. *Die Ordnung der von* $\mathfrak{G}_\nu$ *auf* $\mathfrak{H}$ *induzierten Automorphismengruppe* $\mathfrak{G}_\nu^*$ *ist teilerfremd zur Ordnung von* $\mathfrak{H}$.

[1]) In einem Vortrag in Tübingen (Dezember 1958).

II. *Jede bei $\mathfrak{G}_\nu$ feste Untergruppe von $\mathfrak{H}$ besitzt zu jeder Primzahl p wenigstens eine bei $\mathfrak{G}_\nu$ feste p-Sylow-Gruppe.*

Die Voraussetzung I ist sicher dann erfüllt, wenn die Ordnungen $|\mathfrak{G}|$ und $|\mathfrak{H}|$ keinen Teiler gemeinsam haben. Sie ist wesentlich nicht nur für unsere Beweismethode (sie ermöglicht es, ohne die Brauersche Theorie der modularen Charaktere auszukommen), sondern auch für die Gültigkeit der Ergebnisse (z.B. gilt Formel 1.1 nicht für elementar abelsche Gruppen $\mathfrak{H}$ der Ordnung 8).

Anders steht es mit der Voraussetzung II. Sie ist nach WITT und ZASSENHAUS [4, Kap. IV § 7] und D. G. HIGMAN [2] sicher dann erfüllt, wenn neben I eine der drei folgenden Voraussetzungen gemacht wird:

II'. *$\mathfrak{G}_\nu^*$ ist auflösbar.*

II''. *$\mathfrak{H}$ ist auflösbar.*

II'''. *Die äußere Automorphismengruppe jeder Kompositionsfaktorgruppe jeder Untergruppe von $\mathfrak{H}$ ist auflösbar.*

Hiernach darf man mit ZASSENHAUS vermuten, daß die Voraussetzung II überflüssig ist. Denn bei allen bekannten Gruppen $\mathfrak{H}$ ist II''' erfüllt. Überdies ist nach Voraussetzung I wenigstens eine der Ordnungen $|\mathfrak{G}_\nu^*|$, $|\mathfrak{H}|$ ungerade, und alle bekannten Gruppen ungerader Ordnung sind auflösbar; vermutlich ist also stets II' oder II'' erfüllt.

2. Ergebnisse. Zur bequemen Formulierung führen wir den Modul $\mathfrak{m}$ derjenigen Elemente des Gruppenrings der dargestellten Gruppe $\mathfrak{G}$ (mit komplexen Koeffizienten) ein, bei denen die Koeffizientensumme innerhalb jeder Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ verschwindet. Eine Kongruenz

$$\sum_{G\in\mathfrak{G}} a_G G \equiv \sum_{G\in\mathfrak{G}} b_G G \mod \mathfrak{m}$$

bedeutet, daß für jede Klasse $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ gilt:

$$\sum_{G\in\mathfrak{K}} a_G = \sum_{G\in\mathfrak{K}} b_G .$$

Der Modul $\mathfrak{m}$ hängt eng mit den algebraischen Gleichungen $\varphi = 0$ zwischen den Fixpunktzahlen f_ν zusammen. Wir beginnen mit einer notwendigen Bedingung für die linken Seiten φ solcher Gleichungen. Sie gilt ganz allgemein, die Einschränkung 1.2 ist hier noch nicht nötig.

SATZ 2.1. *Es seien $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$; p sei eine Primzahl. Es sei $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Immer, wenn $\mathfrak{G}$ auf einer elementar abelschen p-Gruppe $\mathfrak{H}$ dargestellt ist, mögen die Fixpunktzahlen $f_\nu = |\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}|$ die Gleichung $\varphi(f_1, \ldots, f_n) = 0$ befriedigen. Dann ist φ eine Linearverbindung mit konstanten Koeffizienten von Polynomen der Gestalt*

$$\prod x_\nu^{c_\nu g_\nu} - \prod x_\nu^{d_\nu g_\nu} \tag{2.1.1}$$

mit $g_\nu = |\mathfrak{G}_\nu|$ und mit rationalen Zahlen c_ν, d_ν derart, daß

$$\sum c_\nu \mathfrak{G}_\nu \equiv \sum d_\nu \mathfrak{G}_\nu \mod \mathfrak{m} \tag{2.1.2}$$

ist; dabei ist unter dem Faktor $\mathfrak{G}_\nu$ die im Gruppenring von $\mathfrak{G}$ gebildete Summe der Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}_\nu$ zu verstehen.

Wir heben hervor, daß die Polynome 2.1.1 nicht von der Wahl der Primzahl p abhängen. Es stellt sich jetzt die Frage: Welche Linearverbindungen dieser Polynome ergeben wirklich Relationen zwischen den Fixpunktzahlen f_ν? Unter der Einschränkung 1.2 lautet die Antwort sehr einfach: Alle. Das folgt aus dem

HAUPTSATZ 2.2. *$\mathfrak{G}$ sei auf $\mathfrak{H}$ dargestellt; $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ seien Untergruppen von $\mathfrak{G}$, deren Darstellung auf $\mathfrak{H}$ prim ist im Sinne von* 1.2. *Sind dann c_ν, d_ν komplexe Zahlen, für welche* 2.1.2 *gilt, so besteht zwischen den Fixpunktzahlen $f_\nu = |\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}|$ und den Ordnungen $g_\nu = |\mathfrak{G}_\nu|$ die Beziehung*

$$\prod_\nu f_\nu^{c_\nu g_\nu} = \prod_\nu f_\nu^{d_\nu g_\nu}. \tag{2.2.1}$$

Hierzu gleichwertig ist die folgende „Fixpunktformel", welche die Fixpunktzahl von $\mathfrak{G}$ durch die Fixpunktzahlen der zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, d.h. der Elemente von $\mathfrak{G}$, ausdrückt:

SATZ 2.3. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung g sei auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt. $\mathfrak{Z}$ sei die Gesamtheit der zyklischen Untergruppen $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$, $|\mathfrak{Z}| = z \geqq 1$. Dann ist*

$$|\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}|^z = \prod_{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}} |\mathfrak{H}_{\mathfrak{Z}}|^{\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})z}. \tag{2.3.1}$$

Darin ist $\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$ eine ganze Zahl, die sich aus gewissen Indizes $\mathfrak{Y}:\mathfrak{Z}$ mittels der Möbiusschen Funktion berechnet:

$$\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}) = \sum_{\substack{\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{Y} \\ \mathfrak{Y} \in \mathfrak{Z}}} \mu(\mathfrak{Y}:\mathfrak{Z}). \tag{2.3.2}$$

Die Beweise dieser Sätze beruhen einerseits auf elementaren Betrachtungen über die Verteilung der Fixpunkte einer Automorphismengruppe (Abschnitt 4), andererseits auf den Frobeniusschen Orthogonalitätsrelationen für Gruppencharaktere und einem Satz von SPEISER über den Zusammenhang zwischen modularen und gewöhnlichen Darstellungen im charakteristikfremden Fall.

3. Beispiele. Bevor wir zu den Beweisen übergehen, soll die Anwendung der Sätze an einigen Beispielen erläutert werden, welche BRAUERS Formel 1.1 in verschiedenen Richtungen verallgemeinern.

(3.1) *Es seien A_1, A_2 zwei Automorphismen der Ordnung 2 einer Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung h. Die von A_1 und A_2 erzeugte Gruppe $\langle A_1, A_2 \rangle$ von Automorphismen von $\mathfrak{H}$ werde mit $\mathfrak{G}_0$ bezeichnet, die von A_ν erzeugte zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}_0$ mit $\mathfrak{G}_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3$; $A_3 = A_1 A_2$). Wie stets in dieser Arbeit sei $|\mathfrak{G}_\nu| = g_\nu$ und $|\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}| = f_\nu$. Ist dann $(h, 2g_3) = 1$, so gilt die Formel* 1.1 *unverändert.*

BEWEIS. $\mathfrak{G}_0$ ist eine Diedergruppe der Ordnung $g_0 = 2g_3$. Im Gruppenring von $\mathfrak{G}_0$ ist

$$\mathfrak{G}_0 + g_3\langle 1 \rangle = \begin{cases} \sum \mathfrak{G}_1' + \mathfrak{G}_3, & \text{wenn } g_3 \text{ ungerade,} \\ \sum \mathfrak{G}_1' + \sum \mathfrak{G}_2' + \mathfrak{G}_3, & \text{wenn } g_3 \text{ gerade.} \end{cases}$$

Darin durchläuft $\mathfrak{G}_\nu'$ die zu $\mathfrak{G}_\nu$ konjugierten Untergruppen von $\mathfrak{G}_0$; ihre Anzahl ist g_3, wenn dies ungerade ist, sonst $\frac{1}{2} g_3$. Beachtet man, daß im ungeraden Fall $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ konjugiert sind, so kann man stets

$$\mathfrak{G}_0 + g_3\langle 1 \rangle \equiv \tfrac{1}{2} g_3 \mathfrak{G}_1 + \tfrac{1}{2} g_3 \mathfrak{G}_2 + \mathfrak{G}_3 \mod \mathfrak{m}$$

schreiben. Hieraus ergibt sich nach 2.2 die Behauptung 1.1 in der Form $f_0^{\varepsilon_0} h^{\varepsilon_0} = f_1^{\varepsilon_1} f_2^{\varepsilon_2} f_3^{\varepsilon_3}$, denn alle $\mathfrak{G}_\nu$ sind auflösbar, also wegen $(h, g_0)=1$ auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt.

(3.2) *Sei p eine Primzahl, $\mathfrak{H}$ eine Gruppe der Ordnung $h \not\equiv 0 \bmod p$. Sei $\mathfrak{G}$ eine Automorphismengruppe von $\mathfrak{H}$, ihre Ordnung sei p^α, ihr Exponent sei p (doch braucht $\mathfrak{G}$ nicht abelsch zu sein). Dann berechnet sich die Fixpunktzahl $|\mathfrak{H}_\mathfrak{G}|$ aus den Fixpunktzahlen der von $\langle 1\rangle$ verschiedenen zyklischen Untergruppen $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ nach der Formel*

$$|\mathfrak{H}_\mathfrak{G}|^{p^{\alpha-1}} = h^{-(p^{\alpha-1}-1)/(p-1)} \cdot \prod |\mathfrak{H}_\mathfrak{Z}| .$$

Beweis. In der Fixpunktformel ist $\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})=1$, da $\mathfrak{Z}$ in keiner von $\mathfrak{Z}$ verschiedenen zyklischen Untergruppe enthalten ist. Außer diesen $\mathfrak{Z}$ enthält $\mathfrak{G}$ noch die eine weitere zyklische Untergruppe $\langle 1\rangle$; für sie ist

$$\mu(\mathfrak{G}, \langle 1\rangle) = 1 - (p^\alpha - 1)/(p-1) = -(p^\alpha - p)/(p-1) .$$

(3.3) In beiden Beispielen lagen Partitionen der Automorphismengruppe vor. In jedem solchen Fall kann man den Hauptsatz zum Nachweis von nicht trivialen Fixpunkten gewisser Automorphismen verwenden:

$\mathfrak{G}_0$ sei überdeckt von n eigentlichen, paarweise elementfremden Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Es sei $\mathfrak{G}_0$ derart auf $\mathfrak{H}$ dargestellt, daß die Darstellungen aller $\mathfrak{G}_\nu$ $(\nu=0, \ldots, n)$ auf $\mathfrak{H}$ prim sind. Sei $\mathfrak{H} \neq \langle 1\rangle$. Dann besitzt wenigstens eine der Gruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ einen von 1 verschiedenen Fixpunkt in $\mathfrak{H}$.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\sum_{\nu=1}^{n} \mathfrak{G}_\nu = \mathfrak{G}_0 + (n-1)\langle 1\rangle$; nach 2.2 ist

$$\prod_{\nu=1}^{n} f_\nu^{\varepsilon_\nu} = f_0^{\varepsilon_0} \cdot h^{n-1} > 1 .$$

(3.4) *$\mathfrak{G}_0$ sei überdeckt von beliebigen Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Wir bezeichnen die $\binom{n}{2}$ Durchschnitte $\mathfrak{G}_\nu \cap \mathfrak{G}_\varrho$ $(1 \leqq \nu < \varrho \leqq n)$ mit $\mathfrak{G}_{\nu\varrho}$, die $\binom{n}{3}$ Durchschnitte $\mathfrak{G}_\nu \cap \mathfrak{G}_\varrho \cap \mathfrak{G}_\sigma$ mit $\mathfrak{G}_{\nu\varrho\sigma}$ usw.; die Ordnungen und Fixpunktzahlen dieser Gruppen seien $g_\nu, g_{\nu\varrho}, \ldots$ und $f_\nu, f_{\nu\varrho}, \ldots$. $\mathfrak{G}_0$ sei derart auf $\mathfrak{H}$ dargestellt, daß die Darstellung jedes $\mathfrak{G}_\nu, \mathfrak{G}_{\nu\varrho}, \ldots$ auf $\mathfrak{H}$ prim ist. Dann ist*

$$f_0^{\varepsilon_0} \cdot \prod f_{\nu\varrho}^{\varepsilon_{\nu\varrho}} \cdot \prod f_{\nu\varrho\sigma\tau}^{\varepsilon_{\nu\varrho\sigma\tau}} \cdot \ldots = \prod f_\nu^{\varepsilon_\nu} \cdot \prod f_{\nu\varrho\sigma}^{\varepsilon_{\nu\varrho\sigma}} \cdot \ldots .$$

Beweis. Weil $\mathfrak{G}_0$ durch $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ überdeckt wird, ist

$$\mathfrak{G}_0 - \sum \mathfrak{G}_\nu + \sum \mathfrak{G}_{\nu\varrho} - + \cdots = 0 .$$

Man erkennt das aus der Gleichung $\prod (1 - \varphi_\nu(G)) = 0$, in der φ_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ die charakteristische Funktion von $\mathfrak{G}_\nu$ bedeutet.

4. Verteilung der Fixpunkte. Wir betrachten zunächst p-Gruppen als „Darstellungsmoduln".

Hilfssatz 4.1. *Es sei p eine Primzahl, $\mathfrak{P}$ eine p-Gruppe, $\mathfrak{Q}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{P}$. Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ der Ordnung $g \not\equiv 0 \bmod p$ sei auf $\mathfrak{P}$ dargestellt. Behauptet wird:*

A. *Ist eine Nebenklasse $\mathfrak{Q}X$ fest bei $\mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{Q}$ fest bei $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{Q}X$ enthält genau so viele Fixpunkte von $\mathfrak{G}$ wie $\mathfrak{Q}$, also mindestens einen.*

B. *Ist $\mathfrak{Q}$ fest bei $\mathfrak{G}$, so ist $|\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}| = |\mathfrak{Q}_{\mathfrak{G}}|\,|(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q})_{\mathfrak{G}}|$. Dabei soll der letzte Faktor die Anzahl der bei $\mathfrak{G}$ festen Nebenklassen $\mathfrak{Q}Y$ $(Y \in \mathfrak{P})$ bezeichnen, auch wenn $\mathfrak{Q}$ nicht normal in $\mathfrak{P}$ ist.*

BEMERKUNG. Aussage und Beweis gelten auch für unendliche p-Gruppen $\mathfrak{P}$ von endlicher Klasse.

BEWEIS VON A. Wenn $\mathfrak{Q}X$ bei $\mathfrak{G}$ fest ist, dann ist auch $\mathfrak{Q}$ fest, denn $\mathfrak{Q}$ besteht aus allen RS^{-1} mit $R, S \in \mathfrak{Q}X$. Wir zeigen durch einen Induktionsschluß bezüglich der Klasse c von $\mathfrak{P}$, daß $\mathfrak{Q}X$ ein bei $\mathfrak{G}$ festes Element X_1 enthält.

Ist $c \leqq 1$, so ist $\mathfrak{P}$ abelsch. Das Element $Y = \prod X^G$ $(G \in \mathfrak{G})$ ist bei $\mathfrak{G}$ fest. Die Ordnung von X sei p^α. Wir bestimmen eine natürliche Zahl m derart, daß $g^m \equiv 1 \bmod p^\alpha$ ist; dann haben wir mod $\mathfrak{Q}$

$$X^G \equiv X, \qquad Y \equiv X^g, \qquad Y^m \equiv X.$$

Daher ist $X_1 = Y^m$ ein in $\mathfrak{Q}X$ enthaltener Fixpunkt von $\mathfrak{G}$.

Ist $c > 1$, so gehen wir zur Faktorgruppe $\overline{\mathfrak{P}}$ des Zentrums $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{P}$ über. Bezeichnen wir allgemein die Anwendung des natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{P}$ auf $\overline{\mathfrak{P}}$ durch Überstreichen, so ist $\mathfrak{G}$ dargestellt auf $\overline{\mathfrak{P}}$, und die Nebenklasse $\overline{\mathfrak{Q}}\overline{X}$ ist bei $\mathfrak{G}$ fest. Da $\overline{\mathfrak{P}}$ die Klasse $c-1$ hat, enthält $\overline{\mathfrak{Q}}\overline{X}$ nach Induktionsvoraussetzung ein bei $\mathfrak{G}$ festes Element $\overline{Y}$. Dieses ist eine Nebenklasse $\overline{Y} = \mathfrak{Z}Y$ mit einem Element $Y = QX$, $Q \in \mathfrak{Q}$. Die sämtlichen Elemente der bei $\mathfrak{G}$ festen Nebenklasse $\mathfrak{Z}Y$ erzeugen eine bei $\mathfrak{G}$ feste Untergruppe $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{P}$. Ihre Klasse ist $c' = 1$, da $\mathfrak{P}'$ vom Zentrum $\mathfrak{Z}$ und einem weiteren Element Y erzeugt wird. Wir bilden den Durchschnitt $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Z} \cap \mathfrak{Q}$. Die Nebenklasse $\mathfrak{Q}'Y$ ist bei $\mathfrak{G}$ fest, denn es ist $\mathfrak{Q}'Y = \mathfrak{Z}Y \cap \mathfrak{Q}Y = \mathfrak{Z}Y \cap \mathfrak{Q}X$. Nun erfüllen $\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{Q}'Y$ und $\mathfrak{G}$ die Voraussetzungen des vorigen Absatzes, daher enthält $\mathfrak{Q}'Y$ einen Fixpunkt X_1 von $\mathfrak{G}$. Es ist $X_1 \in \mathfrak{Q}'Y = \mathfrak{Q}'QX \leqq \mathfrak{Q}X$.

Das gefundene Fixelement X_1 in $\mathfrak{Q}X$ vermittelt eine eineindeutige Zuordnung der Fixpunkte F von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{Q}$ zu den Fixpunkten F' von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{Q}X$ vermöge $F' = FX_1$. Daher stimmen beide Fixpunktzahlen überein, und die Aussage A ist bewiesen.

BEWEIS VON B. Jede der $|(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q})_{\mathfrak{G}}|$ bei $\mathfrak{G}$ festen Nebenklassen von $\mathfrak{Q}$ enthält nach A genau $|\mathfrak{Q}_G|$ Fixpunkte von $\mathfrak{G}$.

HILFSSATZ 4.2. *$\mathfrak{G}$ sei prim auf $\mathfrak{H}$ dargestellt, p sei eine Primzahl. Dann ist jede maximale bei $\mathfrak{G}$ feste p-Untergruppe $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{H}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}$.*

BEWEIS. Der Normalisator $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{P}'$ in $\mathfrak{H}$ ist, wie $\mathfrak{P}'$ selbst, bei $\mathfrak{G}$ fest. Nach 1.2 besitzt $\mathfrak{N}$ eine bei $\mathfrak{G}$ feste p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$. Da $\mathfrak{P}'$ in $\mathfrak{N}$ normal ist, haben wir $\mathfrak{P}' \leqq \mathfrak{P}$. Wegen der Maximaleigenschaft von $\mathfrak{P}'$ ist $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}$. Daher ist $\mathfrak{P}'$ in keiner größeren p-Untergruppe von $\mathfrak{H}$ normal. Nach den Sätzen von SYLOW ist $\mathfrak{P}'$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}$.

SATZ 4.3. *$\mathfrak{G}$ sei auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt, p sei eine Primzahl. Dann sind je zwei bei $\mathfrak{G}$ feste p-Sylow-Gruppen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ von $\mathfrak{H}$ konjugiert unter der Fixgruppe $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$: es gibt ein $T \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{P} = T^{-1}\mathfrak{P}'T$. Ferner ist $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$.*

BEMERKUNG. Die erste Hälfte dieses Satzes eignet sich als Ansatzpunkt zur Definition und Untersuchung des p-Bestandteils und weiter der irreduziblen Bestandteile einer auf $\mathfrak{H}$ primen Darstellung.

BEWEIS. Um die Konjugiertheitsaussage zu beweisen, bilden wir die zerfallende Erweiterung $\overline{\mathfrak{H}}$ von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$; sie enthält $\mathfrak{H}$ als einen Normalteiler und $\mathfrak{G}$ als ein Komplement von $\mathfrak{H}$. Nach SYLOW gibt es ein $H \in \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{P} = H^{-1}\mathfrak{P}'H$. Da sowohl $\mathfrak{P}$ wie $\mathfrak{P}'$ nach Voraussetzung bei $\mathfrak{G}$ fest ist, enthält der Normalisator $\overline{\mathfrak{N}}$ von $\mathfrak{P}$ in $\overline{\mathfrak{H}}$ sowohl $\mathfrak{G}$ als $H^{-1}\mathfrak{G}H$. Da $\mathfrak{G} \leqq \overline{\mathfrak{N}}$ ist, haben wir $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{G}\mathfrak{N}$, wobei $\mathfrak{N} = \mathfrak{H} \cap \overline{\mathfrak{N}}$ den Normalisator von $\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Wir haben also die folgende Lage: $\mathfrak{N}$ ist ein Normalteiler von $\overline{\mathfrak{N}}$, sein Index ist teilerfremd zu seiner Ordnung; $\mathfrak{G}$ und $H^{-1}\mathfrak{G}H$ sind zwei Komplemente von $\mathfrak{N}$ in $\overline{\mathfrak{N}}$; $\mathfrak{G}$ ist auf $\mathfrak{N}$ prim dargestellt (sogar auf $\mathfrak{H}$), und das gleiche gilt für $H^{-1}\mathfrak{G}H$. Hieraus folgt mittels des bekannten Satzes von ZASSENHAUS über die Konjugiertheit von Komplementen im Fall auflösbarer Normalteiler [*4*, Kap. IV Satz 27], daß $\mathfrak{G}$ und $H^{-1}\mathfrak{G}H$ schon in $\overline{\mathfrak{N}}$ konjugiert sind; die Durchführung erfordert einen einfachen Induktionsschluß bezüglich $|\mathfrak{N}|$, den man bei HIGMAN [*2*, Th. 5] dargestellt findet. Das konjugierende Element von $\overline{\mathfrak{N}}$ kann wegen $\overline{\mathfrak{N}} = \mathfrak{G}\mathfrak{N}$ sogar in $\mathfrak{N}$ gewählt werden: es gibt ein $N \in \mathfrak{N}$ mit $N^{-1}H^{-1}\mathfrak{G}HN = \mathfrak{G}$. Setzen wir also $HN = T$, so liegt T im Durchschnitt von $\mathfrak{H}$ mit dem Normalisator von $\mathfrak{G}$. Daher liegt der Kommutator von T mit einem beliebigen Element von $\mathfrak{G}$ sowohl in $\mathfrak{H}$ wie in $\mathfrak{G}$, also ist er $= 1$. Das besagt $T \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$. Da ferner N im Normalisator von $\mathfrak{P}$ liegt, haben wir, wie gewünscht, $\mathfrak{P} = N^{-1}\mathfrak{P}N = N^{-1}H^{-1}\mathfrak{P}'HN = T^{-1}\mathfrak{P}'T$.

Wir haben noch zu beweisen, daß $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ist. Wir wählen eine p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{Q}'$ von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$; und unter allen bei $\mathfrak{G}$ festen p-Untergruppen von $\mathfrak{H}$, welche $\mathfrak{Q}'$ enthalten, wählen wir eine maximale, etwa $\mathfrak{P}'$. Nach 4.2 ist $\mathfrak{P}'$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}$. Nach dem schon bewiesenen Teil von 4.3 gibt es ein $T \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ mit $\mathfrak{P} = T^{-1}\mathfrak{P}'T$. Nun haben wir

$$T^{-1}\mathfrak{Q}'T \leqq T^{-1}(\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{P}')\,T = T^{-1}\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}T \cap T^{-1}\mathfrak{P}'T = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\mathfrak{G}},$$

also $|\mathfrak{Q}'| \leqq |\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}|$. Da $\mathfrak{Q}'$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ist, ist auch $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$, wie behauptet.

5. Beweis des Satzes 2.1. Gegeben ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit den Untergruppen $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Wir betrachten alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$ auf elementar abelschen Gruppen $\mathfrak{H}$ der Ordnung p^n mit fester Primzahl p und beliebigen Exponenten $n > 0$. Die Gesamtheit dieser $\mathfrak{H}$, als Gruppen mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{G}$ betrachtet, heiße $\mathbf{\mathfrak{H}}$. Es sei Φ die Gesamtheit der Polynome $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, welche für die Fixpunktzahlen $f_\nu = |\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}|$ verschwinden bei jeder Wahl von $\mathfrak{H} \in \mathbf{\mathfrak{H}}$. Wir suchen notwendige Bedingungen für die Gestalt der Polynome $\varphi \in \Phi$.

Ist $\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{K} \in \mathfrak{H}$, so ist auch das direkte Produkt $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K} \in \mathfrak{H}$, und es ist $|(\mathfrak{H} \times \mathfrak{K})_{\mathfrak{G}}| = |\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}||\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}}|$. Daher gilt für jedes $\varphi \in \Phi$

$$\varphi(|\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_1}||\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}_1}|, \ldots, |\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_n}||\mathfrak{K}_{\mathfrak{G}_n}|) = 0 \qquad (\mathfrak{H}, \mathfrak{K} \in \mathfrak{H}).$$

Das bedeutet, daß mit $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ stets auch $\varphi(f_1 x_1, \ldots, f_n x_n) \in \Phi$ ist ($f_\nu = |\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}|$, $\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}$). Fassen wir in $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ diejenigen Potenzprodukte der x_ν zusammen, welche bei der Ersetzung $x_\nu \to f_\nu x_\nu$ denselben Faktor erhalten, so zerfällt φ in eine Summe von Ausdrücken $\psi \in \Phi$ der Gestalt

$$\psi = a \prod x_\nu^{\alpha_\nu} + b \prod x_\nu^{\beta_\nu} + \cdots, \tag{5.1}$$

wobei $a, b, \ldots$ komplexe und $\alpha_\nu, \beta_\nu, \ldots$ ganze Zahlen sind, derart, daß für jedes $\mathfrak{H} \in \mathfrak{H}$ gilt

$$\prod f_\nu^{\alpha_\nu} = \prod f_\nu^{\beta_\nu} = \cdots. \tag{5.2}$$

Da $\psi \in \Phi$ ist, haben wir $\psi(f_1, \ldots, f_n) = 0$. Daher folgt aus 5.1 und 5.2, daß die Koeffizientensumme $a + b + \cdots = 0$ ist; also ist ψ eine Linearverbindung der Binome

$$\prod x_\nu^{\alpha_\nu} - \prod x_\nu^{\beta_\nu}, \ldots. \tag{5.3}$$

Um den Satz 2.1 zu beweisen, genügt es, zu zeigen, daß

$$\sum \alpha_\nu g_\nu^{-1} \mathfrak{G}_\nu \equiv \sum \beta_\nu g_\nu^{-1} \mathfrak{G}_\nu \mod \mathfrak{m} \tag{5.4}$$

gilt; dann können wir $\alpha_\nu g_\nu^{-1} = c_\nu$, $\beta_\nu g^{-1} = d_\nu$ setzen, und die Polynome 5.3 erhalten die angegebene Form 2.1.1.

Um 5.4 zu beweisen, betrachten wir eine beliebige Darstellung $G \to D(G)$ von $\mathfrak{G}$ als transitive Permutationsgruppe; ihr Grad sei n. Wir bilden die elementar abelsche Gruppe $\mathfrak{H}$ der Ordnung p^n und stellen $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ dar, indem wir die Elemente einer Basis von $\mathfrak{H}$ gemäß $D(\mathfrak{G})$ permutieren. Ist dann $\mathfrak{G}_\nu$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so ist ihre Fixpunktzahl $f_\nu = p^{t_\nu}$, wobei t_ν die Anzahl der Transitivitätsgebiete der Permutationsgruppe $D(\mathfrak{G}_\nu)$ bezeichnet. Für unsere Gruppe $\mathfrak{H}$ ist also

$$\prod f_\nu^{\alpha_\nu} = p^{\sum \alpha_\nu t_\nu}$$

usw., daher folgt aus 5.2

$$\sum (\alpha_\nu - \beta_\nu) t_\nu = 0. \tag{5.5}$$

Fassen wir die Permutationsgruppe $D(\mathfrak{G})$ als eine lineare Gruppe über dem komplexen Zahlkörper auf und bezeichnen wir ihren Charakter mit χ, so gibt t_ν an, wie oft die identische Darstellung von $\mathfrak{G}_\nu$ in $D(\mathfrak{G}_\nu)$, also der Hauptcharakter von $\mathfrak{G}_\nu$ in χ enthalten ist. Nach den Orthogonalitätsrelationen ist

$$t_\nu = \frac{1}{g_\nu} \sum_{G \in \mathfrak{G}_\nu} \chi(G),$$

daher folgt aus 5.5

$$\sum_\nu (\alpha_\nu - \beta_\nu) g_\nu^{-1} \sum_{G \in \mathfrak{G}_\nu} \chi(G) = 0.$$

Anders geschrieben: Für das Element $r=\sum(\alpha_\nu-\beta_\nu)g_\nu^{-1}\mathfrak{G}_\nu$ des Gruppenrings von $\mathfrak{G}$ gilt

$$\chi(r)=0, \tag{5.6}$$

und zwar für den Charakter χ jeder Permutationsdarstellung von $\mathfrak{G}$, d.h. für jeden durch den Hauptcharakter einer Untergruppe von $\mathfrak{G}$ induzierten Charakter von $\mathfrak{G}$. Aus solchen lassen sich aber nach ARTIN [*1*, p. 3] alle rationalzahligen Charaktere von $\mathfrak{G}$ linear zusammensetzen. Also gilt 5.6 auch für diese. Ist nun χ ein beliebiger Charakter von $\mathfrak{G}$, so ist $\sum\chi(G^\lambda)=\tilde{\chi}(G)$ ein rationalzahliger Charakter, wenn die Summe über alle zu g primen Restklassen λ erstreckt wird; und da r bei der Ersetzung $G\to G^\lambda$ ungeändert bleibt, ist $\tilde{\chi}(r)=\varphi(g)\chi(r)$. Hieraus ergibt sich, daß 5.6 für jeden Charakter χ von $\mathfrak{G}$ gilt. Nun liest man aus den Orthogonalitätsrelationen ab, daß die innerhalb einer beliebigen Klasse $\mathfrak{K}$ konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ gebildete Koeffizientensumme in r verschwindet. Also ist $r\in\mathfrak{m}$, daher gilt 5.4 und der Beweis des Satzes 2.1 ist beendet.

6. Beweis des Hauptsatzes in einem Sonderfall. Wir schicken eine Vorbemerkung voraus:

HILFSSATZ 6.1. *Es sei $G\to M(G)$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch Matrizen mit Elementen aus einem absolut algebraischen Körper K, dessen Charakteristik nicht in $|\mathfrak{G}|$ aufgeht. Für jede Untergruppe $\mathfrak{G}_\nu$ von $\mathfrak{G}$ bezeichne e_ν die Vielfachheit der identischen Darstellung in $M(\mathfrak{G}_\nu)$, und g_ν sei die Ordnung von $\mathfrak{G}_\nu$. Sind dann $c_1,\dots,c_\nu,\dots$ komplexe Zahlen mit*

$$\sum c_\nu\mathfrak{G}_\nu=0, \tag{6.1.1}$$

so ist

$$\sum c_\nu g_\nu e_\nu=0. \tag{6.1.2}$$

BEWEIS. A. Habe K zunächst die Charakteristik Null. Aus 6.1.1 folgt

$$\sum c_\nu\sum_{G\in\mathfrak{G}_\nu}M(G)=0,$$

für die Spur $\chi(G)$ von $M(G)$ gilt daher

$$\sum c_\nu\sum_{G\in\mathfrak{G}_\nu}\chi(G)=0.$$

Die innere Summe hat den Wert $g_\nu e_\nu$, also gilt 6.1.2.

B. Nun sei die Charakteristik von K eine Primzahl p; sie geht nach Voraussetzung nicht in $|\mathfrak{G}|$ auf. Daher gibt es nach einem Satz von SPEISER [*4*, Satz 206] eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ durch Matrizen $D(G)$ mit Elementen aus einem algebraischen Zahlkörper derart, daß beim Übergang zu den Restklassen nach einem geeigneten Primidealteiler von p aus $D(G)$ die gegebene Darstellung $M(G)$ entsteht; die Vielfachheit der identischen Darstellung stimmt in $D(G)$ und $M(G)$ überein. Da die Behauptung 6.1.2 für $D(G)$ schon bewiesen ist, gilt sie auch für $M(G)$.

Wir beweisen jetzt 2.2 unter zusätzlichen Voraussetzungen:

(6.2) *$\mathfrak{G}$ sei auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt. $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_n$ seien Untergruppen von $\mathfrak{G}$, deren Darstellung auf $\mathfrak{H}$ ebenfalls prim ist. Es seien $c_1, \ldots, c_n$ Zahlen mit*

$$\sum c_\nu \mathfrak{G}_\nu = 0. \tag{6.2.1}$$

Dann gilt für die Ordnungen g_ν und die Fixpunktzahlen f_ν

$$\prod f_\nu^{c_\nu g_\nu} = 1. \tag{6.2.2}$$

BEWEIS. A. Zunächst sei $\mathfrak{H}$ elementar abelsch vom Typ $(p, \ldots, p)$, und es sei $|\mathfrak{G}| \not\equiv 0 \bmod p$. Bezüglich einer Basis von $\mathfrak{H}$ wird der von einem Element $G \in \mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ induzierte Automorphismus durch eine Matrix $M(G)$ dargestellt, deren Elemente ganze Zahlen mod p sind. Die Voraussetzungen des Hilfssatzes 6.1 sind erfüllt, daher ist

$$\sum c_\nu g_\nu e_\nu = 0. \tag{6.3}$$

Die Matrizengruppe $M(\mathfrak{G}_\nu)$ ist wegen $|\mathfrak{G}| \not\equiv 0 \bmod p$ vollständig reduzibel. Daher stimmt die Vielfachheit e_ν der identischen Darstellung in $M(\mathfrak{G}_\nu)$ überein mit der Anzahl der unabhängigen Erzeugenden der Fixgruppe $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}$. Also ist $f_\nu = p^{e_\nu}$, und aus 6.3 folgt, wie behauptet,

$$\prod f_\nu^{c_\nu g_\nu} = p^{\sum c_\nu g_\nu e_\nu} = 1.$$

B. Nun sei $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$ eine beliebige p-Gruppe und $|\mathfrak{G}| \not\equiv 0 \bmod p$. Wir können nach A annehmen, daß $\mathfrak{P}$ nicht elementar abelsch ist. Dann enthält $\mathfrak{P}$ eine eigentliche charakteristische Untergruppe $\mathfrak{Q}$. Nun ist $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{P}$ und auf $\mathfrak{P}/\mathfrak{Q}$ prim dargestellt, und beide Gruppen haben kleinere Ordnungen als $\mathfrak{P}$. Wir können also annehmen, daß für sie die Behauptung 6.2.2 schon gilt:

$$\prod |\mathfrak{Q}_{\mathfrak{G}_\nu}|^{c_\nu g_\nu} = 1, \quad \prod |(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q})_{\mathfrak{G}_\nu}|^{c_\nu g_\nu} = 1. \tag{6.4}$$

Nach Hilfssatz 4.1 ist $|\mathfrak{Q}_{\mathfrak{G}_\nu}|\,|(\mathfrak{P}/\mathfrak{Q})_{\mathfrak{G}_\nu}| = |\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_\nu}| = f_\nu$. Multiplizieren wir also die beiden Gleichungen 6.4 aus, so ergibt sich die Behauptung 6.2.2.

C. Jetzt sei $|\mathfrak{H}|$ zu $|\mathfrak{G}|$ teilerfremd, sonst sei $\mathfrak{H}$ beliebig. Da $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt ist, können wir zu jedem Primteiler p von $|\mathfrak{H}|$ eine p-Sylow-Gruppe $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$ wählen, die bei $\mathfrak{G}$ fest ist. $\mathfrak{P}$ befriedigt die Voraussetzungen von Teil B, also ist

$$\prod |\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_\nu}|^{c_\nu g_\nu} = 1. \tag{6.5}$$

Ferner erfüllen $\mathfrak{G}_\nu$ und $\mathfrak{H}$ die Voraussetzungen von Satz 4.3, folglich ist $\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_\nu}$ eine p-Sylow-Gruppe von $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}$. Daher ist

$$|\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}_\nu}| = \prod_{\mathfrak{P}} |\mathfrak{P}_{\mathfrak{G}_\nu}|. \tag{6.6}$$

Multiplizieren wir also die Gleichungen 6.5 für die gewählten Sylow-Gruppen $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{H}$ aus, so erhalten wir die Behauptung 6.2.2.

D. Nun lassen wir alle Einschränkungen fallen. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt, also hat die von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ induzierte Automorphismen-

gruppe $\mathfrak{G}^*$ eine zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremde Ordnung. Bezeichnen wir allgemein die Anwendung des natürlichen Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$ durch Anfügen eines Sterns und ist k_ν die Ordnung des Kerns der Abbildung $\mathfrak{G}_\nu \to \mathfrak{G}_\nu^*$, so haben wir

$$g_\nu = k_\nu g_\nu^*, \tag{6.2.7}$$

und aus der vorausgesetzten Beziehung 6.2.1 folgt

$$\sum c_\nu k_\nu \mathfrak{G}_\nu^* = 0. \tag{6.2.8}$$

Da $\mathfrak{G}^*, \mathfrak{G}_1^*, \ldots, \mathfrak{G}_n^*$ zusammen mit $\mathfrak{H}$ die Voraussetzungen von Teil C erfüllen und $f_\nu = f_\nu^*$ ist, ergibt sich aus 6.2.7 und C die Behauptung:

$$\Pi f_\nu^{c_\nu g_\nu} = \Pi f_\nu^{*\, c_\nu k_\nu g_\nu^*} = 1.$$

7. Beweis der Fixpunktformel. Wir bemerken zunächst:

Hilfssatz 7.1. *Jede endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ läßt sich als Linearverbindung ihrer zyklischen Untergruppen $\mathfrak{Z}$ darstellen. Die Koeffizienten sind eindeutig bestimmt und haben die in* 2.3.2 *angegebenen Werte $\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$.*

Beweis. A. Möglichkeit der Darstellung. Sei $\mathbf{3}$ die Gesamtheit der zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{Y} \in \mathbf{3}$, so verstehen wir, wenn d ein beliebiger Teiler von $|\mathfrak{Y}|$ ist, unter $\mathfrak{Y}_d$ die Elementsumme der Untergruppe der Ordnung d von $\mathfrak{Y}$, und unter $\mathfrak{Y}^{(d)}$ die Summe der Elemente der Ordnung d in $\mathfrak{Y}$. Dann ist für jeden Teiler n von $|\mathfrak{Y}|$

$$\mathfrak{Y}_n = \sum_{d \mid n} \mathfrak{Y}^{(d)},$$

daher ist nach der Möbiusschen Umkehrungsformel

$$\mathfrak{Y}^{(n)} = \sum_{d \mid n} \mu(n/d)\, \mathfrak{Y}_d.$$

Wählen wir hierin $n = |\mathfrak{Y}|$ und bezeichnen wir die Summe $\mathfrak{Y}^{(n)}$ der erzeugenden Elemente von $\mathfrak{Y}$ kurz mit $[\mathfrak{Y}]$, so erhalten wir

$$[\mathfrak{Y}] = \sum_{\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{Y}} \mu(\mathfrak{Y} : \mathfrak{Z})\, \mathfrak{Z}.$$

Mit der in 2.3.2 eingeführten Abkürzung $\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$ wird also

$$\mathfrak{G} = \sum_{\mathfrak{Y} \in \mathbf{3}} [\mathfrak{Y}] = \sum_{\mathfrak{Y} \in \mathbf{3}} \sum_{\mathfrak{Z} \leq \mathfrak{Y}} \mu(\mathfrak{Y} : \mathfrak{Z})\, \mathfrak{Z} = \sum_{\mathfrak{Z} \in \mathbf{3}} \mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})\, \mathfrak{Z}.$$

B. Eindeutigkeit. Es seien $b_\mathfrak{Z}$ Zahlen, die nicht alle 0 sind. Wir wählen eine Gruppe $\mathfrak{Y} \in \mathbf{3}$ maximaler Ordnung mit $b_\mathfrak{Y} \neq 0$. Ein erzeugendes Element dieser Gruppe kann in keiner Gruppe $\mathfrak{Z} \neq \mathfrak{Y}$ mit $b_\mathfrak{Z} \neq 0$ auftreten; es hat also in $\sum b_\mathfrak{Z} \mathfrak{Z}$ den von Null verschiedenen Koeffizienten $b_\mathfrak{Y}$, daher ist $\sum b_\mathfrak{Z} \mathfrak{Z} \neq 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit der zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ nachgewiesen und der Beweis des Hilfssatzes 7.1 beendet.

Wir kommen zum Beweis der Fixpunktformel 2.3.1. Gegeben ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$, die auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt ist. Jede zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}$ von

$\mathfrak{G}$ ist auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt. Denn die Forderung 1.2.I ist erfüllt, weil die Ordnung der auf $\mathfrak{H}$ induzierten Automorphismengruppe $\mathfrak{Z}^*$ in $|\mathfrak{G}^*|$ aufgeht und $|\mathfrak{G}^*|$ zu $|\mathfrak{H}|$ teilerfremd ist; die Forderung 1.2.II ist erfüllt, weil $\mathfrak{Z}$ auflösbar ist. Nun haben wir nach 7.1

$$\mathfrak{G} - \sum_{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}} \mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})\, \mathfrak{Z} = 0.$$

Wir können 6.2 anwenden und finden

$$|\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}|^{|\mathfrak{G}|} \prod_{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}} |\mathfrak{H}_{\mathfrak{Z}}|^{-\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})|\mathfrak{Z}|} = 1.$$

Damit ist die Fixpunktformel bewiesen. Wir schließen zwei Bemerkungen an, welche die Berechnung von $\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$ erleichtern.

SATZ 7.2. *Es sei $\mathfrak{Z}$ eine zyklische Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Es bezeichne $\overline{\mathfrak{Z}}$ das Erzeugnis aller zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$, welche entweder gleich $\mathfrak{Z}$ sind oder $\mathfrak{Z}$ als eine Untergruppe von Primzahlindex enthalten. Dann gilt für jede Gruppe $\mathfrak{G}'$ mit $\overline{\mathfrak{Z}} \leqq \mathfrak{G}' \leqq \mathfrak{G}$:*

$$\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}) = \mu(\mathfrak{G}', \mathfrak{Z}).$$

Für $\mathfrak{G}'$ kann man z. B. den Zentralisator von $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{G}$ wählen.

BEWEIS. Zu der Summe 2.3.2, durch welche $\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})$ definiert ist, geben nur diejenigen zyklischen Untergruppen $\mathfrak{Y}$ von $\mathfrak{G}$ einen Beitrag, für welche der Index $\mathfrak{Y}:\mathfrak{Z}$ quadratfrei ist. Jede solche Gruppe $\mathfrak{Y}$ liegt in $\overline{\mathfrak{Z}}$, daher auch in $\mathfrak{G}'$.

SATZ 7.3. *$\mathfrak{G}$ zerfalle in ein direktes Produkt von Faktoren $\mathfrak{G}_\varrho$ mit paarweise teilerfremden Ordnungen. Dann zerfällt jede zyklische Untergruppe $\mathfrak{Z}$ von $\mathfrak{G}$ eindeutig in das Produkt von zyklischen Gruppen $\mathfrak{Z}_\varrho$ mit $\mathfrak{Z}_\varrho \in \mathfrak{G}_\varrho$, und es ist*

$$\mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z}) = \prod_\varrho \mu(\mathfrak{G}_\varrho, \mathfrak{Z}_\varrho).$$

BEWEIS. Die erste Aussage ergibt sich durch Zerlegung eines erzeugenden Elements von $\mathfrak{Z}$ in der gegebenen Produktzerlegung von $\mathfrak{G}$. Die zweite Aussage ergibt sich, wenn man die Zerlegung von $\mathfrak{G}$ nach 7.1 in der Form

$$\sum_{\mathfrak{Z}} \mu(\mathfrak{G}, \mathfrak{Z})\, \mathfrak{Z} = \prod_\varrho \sum_{\mathfrak{Z}_\varrho} \mu(\mathfrak{G}_\varrho, \mathfrak{Z}_\varrho)\, \mathfrak{Z}_\varrho$$

schreibt und die rechte Seite ausmultipliziert. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung 7.1 stimmen die Koeffizienten von $\mathfrak{Z} = \prod \mathfrak{Z}_\varrho$ auf beiden Seiten überein.

8. Abschluß des Beweises des Hauptsatzes. Wir schicken eine Bemerkung über lineare Abhängigkeit mod m von zyklischen Gruppen voraus; dabei bedeutet m, wie in Abschnitt 2, die Gesamtheit der Elemente des Gruppenrings von $\mathfrak{G}$, deren Koeffizientensumme in jeder Klasse konjugierter Elemente von $\mathfrak{G}$ verschwindet.

HILFSSATZ 8.1. *$\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_l$ seien zyklische Untergruppen von $\mathfrak{G}$, derart, daß keine zwei von ihnen in $\mathfrak{G}$ konjugiert sind. Seien $b_1, \ldots, b_l$ Zahlen mit $\sum b_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda \equiv 0$ mod m. Dann ist $b_1 = \cdots = b_l = 0$.*

BEWEIS. Wir wählen die Numerierung so, daß $|\mathfrak{Z}_1| \leqq \cdots \leqq |\mathfrak{Z}_l|$ ist. Es genügt, $b_l = 0$ nachzuweisen; der Rest folgt dann durch Induktion bezüglich l. Wir wählen ein erzeugendes Element Z von $\mathfrak{Z}_l$. Ist $G^{-1}ZG \in \mathfrak{Z}_\lambda$ für ein $G \in \mathfrak{G}$ und ein λ, so ist

$$|\mathfrak{Z}_l| = |\langle G^{-1}ZG\rangle| \leqq |\mathfrak{Z}_\lambda| \leqq |\mathfrak{Z}_l|,$$

also ist

$$\mathfrak{Z}_\lambda = \langle G^{-1}ZG\rangle = G^{-1}\mathfrak{Z}_l G.$$

Hieraus folgt nach Voraussetzung $\mathfrak{Z}_\lambda = \mathfrak{Z}_l$. Zu Z konjugierte Elemente treten also in keinem $\mathfrak{Z}_\lambda$, $\lambda \neq l$, auf. Ist ihre Anzahl in $\mathfrak{Z}_l$ gleich k, so ist ihre Koeffizientensumme in $\sum b_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda$ gleich $k b_l$; andererseits ist sie Null wegen $\sum b_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda \in \mathfrak{m}$. Daher ist $b_l = 0$, wie behauptet.

Jetzt können wir den Hauptsatz in voller Allgemeinheit beweisen. Gegeben sind n Untergruppen $\mathfrak{G}_\nu$ von $\mathfrak{G}$, die auf $\mathfrak{H}$ prim dargestellt sind, und dazu Zahlen c_ν, d_ν mit

$$\sum_\nu (c_\nu - d_\nu)\,\mathfrak{G}_\nu \equiv 0 \mod \mathfrak{m}. \tag{8.2}$$

Wir stellen jede der Gruppen $\mathfrak{G}_\nu$ als Linearverbindung ihrer zyklischen Untergruppen $\mathfrak{Z}$ dar:

$$\mathfrak{G}_\nu = \sum \mu(\mathfrak{G}_\nu, \mathfrak{Z})\,\mathfrak{Z}. \tag{8.3}$$

Nach der Fixpunktformel haben wir mit den gleichen $\mathfrak{Z}$

$$f_\nu^{\mathfrak{H}} = \prod_{\mathfrak{Z}} |\mathfrak{H}_\mathfrak{Z}|^{\mu(\mathfrak{G}_\nu, \mathfrak{Z})|\mathfrak{Z}|}. \tag{8.4}$$

Sowohl in 8.3 wie in 8.4 dürfen wir $\mathfrak{Z}$ die Gesamtheit $\mathfrak{Z}$ aller zyklischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ durchlaufen lassen, wenn wir die Verabredung treffen, $\mu(\mathfrak{G}_\nu, \mathfrak{Z}) = 0$ zu setzen, falls $\mathfrak{Z}$ nicht in $\mathfrak{G}_\nu$ enthalten ist. Wir führen die Darstellung 8.3 in 8.2 ein und erhalten

$$\sum_{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}} a_\mathfrak{Z}\,\mathfrak{Z} \equiv 0 \mod \mathfrak{m}, \qquad a_\mathfrak{Z} = \sum_\nu (c_\nu - d_\nu)\,\mu(\mathfrak{G}_\nu, \mathfrak{Z}). \tag{8.5}$$

Wir wählen zyklische Untergruppen $\mathfrak{Z}_1, \ldots, \mathfrak{Z}_l$ von $\mathfrak{G}$ derart, daß jedes $\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}$ zu genau einer der Gruppen $\mathfrak{Z}_\lambda$ in $\mathfrak{G}$ konjugiert ist. Ersetzen wir in 8.5 jedes $\mathfrak{Z}$ durch die dazu konjugierte Gruppe $\mathfrak{Z}_\lambda$, so ändert sich mod $\mathfrak{m}$ nichts, also gilt

$$\sum_\lambda b_\lambda \mathfrak{Z}_\lambda \equiv 0 \mod \mathfrak{m} \tag{8.6}$$

mit

$$b_\lambda = \sum_{\mathfrak{Z}}{}' a_\mathfrak{Z}, \tag{8.7}$$

worin $\mathfrak{Z}$ jetzt nur noch die zu $\mathfrak{Z}_\lambda$ konjugierten Untergruppen von $\mathfrak{G}$ durchläuft. Für diese $\mathfrak{Z}$ gilt

$$|\mathfrak{H}_\mathfrak{Z}| = |\mathfrak{H}_{\mathfrak{Z}_\lambda}|, \qquad z = |\mathfrak{Z}| = |\mathfrak{Z}_\lambda| = z_\lambda. \tag{8.8}$$

Erheben wir nun 8.4 in die Potenz $(c_\nu - d_\nu)$ und multiplizieren wir über von 1 bis n, so erhalten wir nach 8.5

$$\prod_\nu f_\nu^{(c_\nu - d_\nu)g_\nu} = \prod_{\mathfrak{Z} \in \mathfrak{Z}} |\mathfrak{H}_\mathfrak{Z}|^{a_\mathfrak{Z}}$$

und weiter nach 8.7 und 8.8

$$\prod_\nu f_\nu^{(c_\nu - d_\nu)g_\nu} = \prod_\lambda |\mathfrak{H}_{\mathfrak{Z}_\lambda}|^{b_\lambda z_\lambda}.$$

Die Gruppen $\mathfrak{Z}_\lambda$ sind nach Hilfssatz 8.1 mod $\mathfrak{m}$ linear unabhängig. Aus 8.6 folgt also $b_\lambda = 0$. Daher hat der letzte Ausdruck den Wert 1, und der Hauptsatz ist bewiesen.

Literatur

[1] ARTIN, E.: Die gruppentheoretische Struktur der Diskriminanten algebraischer Zahlkörper. J. reine u. angew. Math. **164**, 1–11 (1931). – [2] HIGMAN, D. G.: Remarks on splitting extensions. Pacific J. Math. **4**, 545–555 (1954). – [3] SPEISER, A.: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 4. Aufl. Basel u. Stuttgart 1956. – [4] ZASSENHAUS, H.: Lehrbuch der Gruppentheorie. Leipzig u. Berlin 1937; 2. Aufl. (englisch) Göttingen 1958.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 23. Juli 1959)

REMMERT, R., u. K. STEIN
Math. Zeitschr. 73, 159–189 (1960)

Eigentliche holomorphe Abbildungen

Von
REINHOLD REMMERT und KARL STEIN

Das Studium der biholomorphen Abbildungen hat in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen lange eine dominierende Rolle gespielt. Neuerdings gewinnen jedoch allgemeinere, auch dimensionserniedrigende Abbildungen in steigendem Maße an Interesse. Im Zusammenhang mit Untersuchungen über komplexe Mannigfaltigkeiten und komplexe Räume ist insbesondere die Klasse der eigentlichen holomorphen Abbildungen in den Vordergrund getreten, und es hat sich gezeigt, daß diese Abbildungen recht bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. In der vorliegenden Arbeit sollen eigentliche holomorphe Abbildungen komplexer Räume systematisch betrachtet werden. Wir sind bestrebt, dabei auch Fragestellungen zu diskutieren, die für biholomorphe Abbildungen geläufig sind, und auf Beziehungen zur klassischen Abbildungstheorie einzugehen.

In § 1 wird zunächst an die grundlegenden Begriffsbildungen erinnert; einige wichtige Aussagen werden angegeben. Im nächsten Paragraphen wird sodann gezeigt, daß sich jede eigentliche holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden normalen komplexen Raumes in natürlicher Weise faktorisieren läßt: Jede solche Abbildung gestattet eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Darstellung als Produkt spezieller eigentlicher holomorpher Abbildungen, nämlich einer maximalen Abbildung, einer Überlagerungsabbildung und einer quasi injektiven Abbildung [1]. Über maximale sowie über quasi injektive und injektive Abbildungen sind an anderer Stelle Resultate mitgeteilt worden, auf die hier nur hingewiesen wird (vgl. [29], [36], [37]).

In den folgenden Abschnitten werden vor allem Überlagerungsabbildungen weiter betrachtet; insbesondere wird die Frage behandelt, wann zu vorgegebenen zusammenhängenden normalen komplexen Räumen X, Y gleicher Dimension eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ existiert. Jede derartige Abbildung τ besitzt einen positiven Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau)$; biholomorphe Abbildungen sind durch $\mathfrak{g}(\tau) = 1$ charakterisiert. Es werden topologische und analytische Bedingungen für die Existenz einer Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ angegeben (§ 3, Satz 5, 7 und 8).

In § 4 werden Fortsetzungs- und Konvergenzeigenschaften holomorpher Überlagerungsabbildungen diskutiert. Damit im Zusammenhang werden einige Fälle besprochen, in denen holomorphe Überlagerungsabbildungen eines komplexen Raumes auf sich stets biholomorph sind.

§ 5 enthält Aussagen, bei welchen das Randverhalten eigentlicher holomorpher Abbildungen eine Rolle spielt. Für den Sonderfall biholomorpher

[1]) Zu diesen Begriffen vgl. § 2.

Abbildungen stehen verschiedene Resultate dieses und des folgenden Paragraphen zu Sätzen aus der Dissertation von W. ROTHSTEIN [32] aus dem Jahre 1935 in naher Beziehung; die Betrachtungen in diesen Abschnitten wurden durch die Rothsteinschen Untersuchungen angeregt und schließen an sie an. — Als Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von H. POINCARÉ ergibt sich, daß ein beschränktes Zylindergebiet des C^2 niemals eigentlich und holomorph in eine Hyperkugel eines Zahlenraumes beliebiger (endlicher) Dimension abgebildet werden kann. Weiter wird gezeigt, daß jede holomorphe Überlagerungsabbildung eines beschränkten Zylindergebietes des C^2 auf ein Gebiet der gleichen Art kartesisches Produkt von holomorphen Überlagerungsabbildungen der Komponenten ist.

§ 6 beschäftigt sich mit holomorphen Überlagerungsabbildungen von Polyedergebieten des C^2 (ein Polyedergebiet in einem komplexen Raum X ist definiert als zusammenhängende Komponente des offenen Kernes eines analytischen Polyeders in X mit gewissen weiteren Eigenschaften). In einem solchen Gebiet A sind in natürlicher Weise Zerlegungen bestimmt, die als die charakteristischen Zerlegungen von A bezeichnet werden. Jede holomorphe Überlagerungsabbildung von A auf ein Polyedergebiet ${}^*A$ ordnet den charakteristischen Zerlegungen von A gewisse der charakteristischen Zerlegungen von ${}^*A$ zu (Satz 14). Der Fall, daß A und ${}^*A$ euklidische Polyedergebiete im C^2 sind, wird ausführlicher behandelt (unter einem euklidischen Polyedergebiet im C^n wird das Innere einer konvexen Zelle verstanden); es zeigt sich, daß, wenn die „Stufen" von A und ${}^*A$ nicht kleiner als 3 sind, jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: A \to {}^*A$ die Beschränkung einer affinen Abbildung ist. Insbesondere ergibt sich, daß solche euklidischen Polyedergebiete im allgemeinen, d. h. wenn sie keine speziellen Symmetrien aufweisen, außer der Identität keine holomorphen Überlagerungsabbildungen auf sich gestatten. Derartige Gebiete sind daher einfache Beispiele für „starre" Holomorphiegebiete vom topologischen Typus der Hyperkugel.

§ 1. Holomorphe Abbildungen

1.1. Unter einem komplexen Raum X wird in dieser Arbeit stets ein komplexer Raum im Sinne von SERRE verstanden (vgl. [35], ferner [15]); alle auftretenden Räume seien nichtleer und endlich-dimensional. Die (komplexe) Dimension von X im Punkte x wird mit $d_x(X)$ bezeichnet, die Dimension von X schlechthin mit $d(X)$; die topologische Dimension von X ist dann $2d(X)$. Sei M eine nichtleere lokal-analytische Menge in X. M besitzt in jedem Punkte $x \in X$ eine mit $d_x(M)$ bezeichnete (komplexe) Dimension; unter der (komplexen) Codimension von M in x wird die Zahl $c_x(M) := d_x(X) - d_x(M)$ verstanden. Als Dimension bzw. Codimension von M schlechthin sind die Zahlen $d(M) := \max_{x \in M} d_x(M)$ bzw. $c(M) := \min_{x \in M} c_x(M)$ definiert. M heißt rein-d-dimensional bzw. rein-c-codimensional, wenn stets $d_x(M) = d$ bzw. $c_x(M) = c$ für alle $x \in M$ ist; gilt nur $d_x(M) \geqq d\,(d_x(M) \leqq d)$ bzw. $c_x(M) \geqq c\,(c_x(M) \leqq c)$, so heißt M mindestens (höchstens) d-dimensional bzw. mindestens (höchstens) c-codimensional.

Eine stetige Abbildung $\tau: X \to Y$ des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y heißt *holomorph*, wenn folgendes gilt: Ist g eine holomorphe Funktion in einer offenen Menge $V \subset Y$, so ist die Funktion $g \circ \tau$ holomorph in $\tau^{-1}(V) \subset X$.

Die Fasern $\tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in X$, einer holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ sind stets analytische Mengen in X. Zusammenhängende Faserkomponenten heißen *Niveaumengen*. Unter dem *(lokalen) Rang* $r_x(\tau)$ von τ im Punkte $x \in X$ wird die Codimension von $\tau^{-1}(\tau(x))$ in x verstanden; die Zahl $r(\tau) := \max_{x \in X} r_x(\tau)$ heißt der *Rang* von τ schlechthin. Der Punkt $x \in X$ gehört zur *Entartungsmenge* $E(\tau)$ von τ, wenn es in jeder Umgebung von x Punkte x' mit $r_{x'}(\tau) > r_x(\tau)$ gibt. Gilt stets $r_x(\tau) = d_x(X)$ — insbesondere ist dann $E(\tau)$ leer — so heißt τ (im strengen Sinne) *nirgends entartet* [2]).

Das Bild $\tau(X)$ von X unter einer holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ ist im allgemeinen keine lokal-analytische Menge in Y. Ist jedoch die Topologie von X abzählbar, so besitzt das Bild $\tau(X)$ als topologischer Unterraum von Y eine topologische Dimension im Sinne von [20]. Es gilt:

Satz 1. *Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung vom Range r eines komplexen Raumes X mit abzählbarer Topologie in einen beliebigen komplexen Raum Y, so ist $\tau(X)$ ein topologisch-$2r$-dimensionaler metrisierbarer Unterraum von Y mit abzählbarer Topologie.*

Den Beweis stützen wir auf folgenden, weiter unten bewiesenen

Hilfssatz. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 *ist $\tau(X)$ die Vereinigung von abzählbar vielen höchstens topologisch-$2r$-dimensionalen kompakten Mengen K_ν mit abzählbarer Topologie; wenigstens eine Menge K_ν ist topologisch-$2r$-dimensional.*

Hieraus ergibt sich zunächst, daß der Unterraum $\tau(X) \subset Y$ eine abzählbare Topologie besitzt. Dann ist aber $\tau(X)$ als regulärer Raum auch normal und nach URYSOHN metrisierbar (vgl. etwa N. BOURBAKI, Topologie générale, Chap. IX, § 4; dort insbesondere p. 67, Exerc. 5, 6, 7). Aus dem "Sum Theorem for Dimension n" (vgl. [20], p. 30) folgt schließlich, daß $\tau(X)$ ein topologisch-$2r$-dimensionaler Raum ist.

Beweis des Hilfssatzes. Wir führen vollständige Induktion nach der komplexen Dimension $d(X)$; der Induktionsbeginn $d(X) = 0$ ist trivial. Die Behauptung sei für komplexe Räume X mit $d(X) < d$, $d \geqq 1$, bewiesen. Es genügt dann, sie für irreduzible komplexe Räume X mit $d(X) = d$ zu beweisen. Sei $E := E(\tau)$ die Entartungsmenge von τ; E ist entweder leer oder eine höchstens (komplex)-$(d-1)$-dimensionale analytische Menge in X (vgl. [30], Satz 18). Zu jedem Punkt $x \in X - E$ gibt es beliebig kleine relativ-kompakte offene Umgebungen U in $X - E$, so daß $\tau(U)$ jeweils eine rein (komplex)-r-dimensionale lokal-analytische Menge in Y ist ([30], Satz 19). Man kann

[2]) Der Term *nirgends entartet* wird hier wie in [14] und [15] benutzt; in [30] wurde hiervon abweichend jede holomorphe Abbildung τ mit leerem $E(\tau)$ nirgends entartet genannt.

daher insbesondere eine Umgebung U^* von x so wählen, daß $\overline{\tau(U^*)}$ eine topologisch-$2r$-dimensionale kompakte Menge in $\tau(X-E)$ mit abzählbarer Topologie ist. Offenbar läßt sich $X-E$ mit abzählbar vielen derartigen U^* überdecken; demnach ist $\tau(X-E)$ die Vereinigung von abzählbar vielen topologisch-$2r$-dimensionalen kompakten Mengen mit abzählbarer Topologie.

Ist nun E leer, so ist alles bewiesen. Ist E nichtleer, so werde auf E die natürliche komplexe Struktur induziert; E wird dann zu einem komplexen Raum mit $0 \leqq d(E) \leqq d-1$, und die Beschränkung $\tau|E =: \tau' : E \to Y$ von τ auf E wird eine holomorphe Abbildung mit $r(\tau') \leqq r-2$. Da E ebenfalls eine abzählbare Topologie besitzt, ist nach Induktionsannahme $\tau'(E)$ die Vereinigung von abzählbar vielen höchstens topologisch-$(2r-4)$-dimensionalen kompakten Mengen mit abzählbarer Topologie. Wegen $\tau(X) = \tau(X-E) \cup \tau'(E)$ ist damit aber auch die Behauptung des Hilfssatzes für X als richtig nachgewiesen.

1.2. Eine stetige Abbildung eines lokal-kompakten Raumes R in einen lokal-kompakten Raum R' heißt *eigentlich*, wenn das Urbild jeder kompakten Menge in R' eine kompakte Menge in R ist[3]).

Es sei $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung vom Range r des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y, derart, daß $\tau(X)$ eine lokal-analytische Menge in Y ist. Diese letzte Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn τ eigentlich ist, in diesem Falle ist $\tau(X)$ sogar eine analytische Menge in Y (vgl. [*30*], Satz 23). Die Menge $\tau(X)$ werde als geringter Unterraum von Y aufgefaßt, sie ist dann ein komplexer Raum Y_0 der Dimension $d(Y_0) = r$. Es bezeichne $\iota : Y_0 \to Y$ die Injektion von Y_0 in Y, ferner seien (X^*, ξ) bzw. (Y_0^*, η) Normalisierungen von X bzw. Y_0[4]). Man hat eine holomorphe Abbildung $\tau_0 : X \to Y_0$ mit $\tau = \iota \circ \tau_0$. Wir beweisen, daß unter einer geeigneten weiteren Voraussetzung über τ die Abbildung τ zu einer holomorphen Abbildung $\tau_0^* : X^* \to Y_0^*$ geliftet werden kann.

Satz 2. *Die holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$ sei so beschaffen, daß jede irreduzible Komponente von X vermöge τ auf eine irreduzible Komponente von $\tau(X) = Y_0$ abgebildet wird. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\tau_0^* : X^* \to Y_0^*$, so daß $\tau_0 \circ \xi = \eta \circ \tau_0^*$, also $\tau \circ \xi = \iota \circ \eta \circ \tau_0^*$. Es gilt $r(\tau_0^*) = r(\tau)$, $\overline{\tau_0^*(X^*)} = Y_0^*$. Ist τ eigentlich, so ist τ_0^* eigentlich und surjektiv.*

Beweis. Bezeichnen wir mit N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von $\tau(X) = Y_0$, so ist die durch Beschränkung von η bestimmte Abbildung $'\eta : Y_0^* - \overset{-1}{\eta}(N) \to Y_0 - N$ biholomorph. Durch die Gleichung $'\tau_0^*(x^*) := {}'\eta^{-1} \circ \tau_0 \circ \xi(x^*)$, $x^* \in X^* - \overbrace{(\tau_0 \circ \xi)}^{-1}(N)$, wird daher eine holomorphe Abbildung

$$'\tau_0^* : X^* - \overbrace{(\tau_0 \circ \xi)}^{-1}(N) \to Y_0^*$$

[3]) Die Bezeichnung *eigentliche Abbildung* schließt an den von N. BOURBAKI verwendeten Term *application propre* an. In der Literatur wird auch die Bezeichnung *kompakte Abbildung* benutzt (vgl. [*19*]).

[4]) Zum Begriff der Normalisierung vgl. [*15*], §§ 6 und 7.

definiert. Da τ jede irreduzible Komponente von X auf eine ebensolche von $\tau(X)$ abbildet, ist $\overset{-1}{\tau_0}(N)$ eine nirgends dichte analytische Menge in X. Daher ist $\overbrace{(\tau_0 \circ \xi)}^{-1}(N)$ eine analytische Menge in X^*, die den normalen komplexen Raum X^* nirgends zerlegt. Da $\eta \circ {}'\tau_0^* : X^* - \overbrace{(\tau_0 \circ \xi)}^{-1}(N) \to Y_0$ zu der holomorphen Abbildung $\tau_0 \circ \xi : X^* \to Y_0$ fortsetzbar ist, so folgt aus [36], Hilfssatz 2 (man setze: $R_0 = X^*$, $M_0 = \overbrace{(\tau_0 \circ \xi)}^{-1}(N)$, $R_1 = Y_0^*$, $R_2 = Y_0$, ${}'F_{01} = {}'\tau_0^*$, $F_{12} = \eta$), daß ${}'\tau_0^*$ in eindeutiger Weise zu einer stetigen Abbildung $\tau_0^* : X^* \to Y_0^*$ fortsetzbar ist. τ_0^* ist auf Grund des für normale komplexe Räume gültigen Riemannschen Satzes über hebbare Singularitäten holomorph. Nach Konstruktion gilt: $\tau_0 \circ \xi = \eta \circ \tau_0^*$. Die Gleichung $r(\tau) = r(\tau_0^*)$ ist trivial, da die Fasern von ξ und η stets endliche Punktmengen sind. Aus der Identität $\overline{Y_0^* - \overset{-1}{\eta}(N)} = Y_0^*$ folgt unmittelbar $\overline{\tau_0^*(X^*)} = Y_0^*$.

Es ist evident, daß τ_0^* eigentlich und surjektiv ist, wenn τ eigentlich ist[5]).

Bemerkung. Ist τ nicht eigentlich, so ist τ_0^* im allgemeinen auch nicht surjektiv.

Die Fasern $\overset{-1}{\tau}(\tau(x))$ einer holomorphen Abbildung $\tau : X \to Y$ zerfallen in eindeutiger Weise in endlich oder unendlich viele Niveaumengen. Die Anzahl $\mathfrak{f}_x(\tau)$ der Niveaumengen der Faser $\overset{-1}{\tau}(\tau(x))$ nennen wir die *Faserzahl von τ in x*; die Zahl $\mathfrak{f}(\tau) := \sup_{x \in X} \mathfrak{f}_x(\tau)$ werde die *Faserzahl von τ* schlechthin genannt.

Man beweist leicht:

Ist in Satz 2 die Abbildung τ_0^* surjektiv, so gilt:

$$\max\left(\mathfrak{f}(\eta), \mathfrak{f}(\tau_0^*)\right) \leqq \mathfrak{f}(\tau \circ \xi) \leqq \mathfrak{f}(\eta) \cdot \mathfrak{f}(\tau_0^*).$$

Einfache Beispiele zeigen, daß diese Ungleichung nicht verschärft werden kann.

Ein komplexer Raum Y erzeugt in jedem Punkt $y \in Y$ endlich viele analytische Primkeime. Ihre Anzahl $k(y)$ heißt die *Keimzahl von Y in y*; die Zahl $k(Y) := \sup_{y \in Y} k(y)$ heißt die *Keimzahl von Y* schlechthin. Ist (Y^*, η) eine Normalisierung von Y, so gilt: $\mathfrak{f}_{y^*}(\eta) = k_{\eta(y^*)}(Y)$ für alle $y^* \in Y^*$, also $\mathfrak{f}(\eta) = k(Y)$.

Die Keimzahl $k(Y)$ kann unendlich sein, selbst dann, wenn Y irreduzibel ist. Daraus folgt, daß auch die Faserzahl einer eigentlichen holomorphen Abbildung $\tau : X \to Y$ bei irreduziblem X unendlich sein kann.

Eine holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$ heißt *einfach*, wenn alle ihre Fasern zusammenhängend sind, d.h. wenn gilt: $\mathfrak{f}(\tau) = 1$. Ist X lokal-irreduzibel und (X^*, ξ) eine Normalisierung von X, so ist dann auch $\tau \circ \xi$ einfach. Kann τ überdies zu einer surjektiven Abbildung τ_0^* gemäß Satz 2 geliftet werden, so folgt weiter: $\mathfrak{f}(\tau_0^*) = \mathfrak{f}(\eta) = 1$. Der Bildraum $\tau(X)$ hat also die Keimzahl 1, so daß sich insbesondere ergibt:

[5]) Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß τ stets dann in eindeutiger Weise zu einer holomorphen Abbildung τ_0^* geliftet werden kann, wenn $\overset{-1}{\tau}(N)$ nirgends dicht in X liegt.

Ist $\tau: X \to Y$ eine einfache eigentliche holomorphe Abbildung vom Range r und ist X irreduzibel und lokal-irreduzibel, so ist $\tau(X)$ ein r-dimensionaler irreduzibler und lokal-irreduzibler abgeschlossener komplexer Unterraum von Y.

§ 2. Faktorisierung eigentlicher holomorpher Abbildungen

2.1. In diesem Paragraphen beschreiben wir drei spezielle Typen von eigentlichen holomorphen Abbildungen. Wir werden zeigen, daß jede eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in kanonischer Weise als Produkt derartiger „reiner" Abbildungen darstellbar ist, wenn X als zusammenhängend und normal vorausgesetzt wird.

Es sei zunächst an die folgende Redeweise erinnert (vgl. [37]; X, Y, Y_0 seien beliebige komplexe Räume): Sind $\tau: X \to Y$ und $\tau_0: X \to Y_0$ holomorphe Abbildungen, so heißt τ_0 *abhängig von* τ, wenn für die durch τ und τ_0 bestimmte holomorphe Abbildung $(\tau, \tau_0): x \to (\tau(x), \tau_0(x))$ von X in $Y \times Y_0$ gilt: $r_x((\tau, \tau_0)) = r_x(\tau)$ für alle $x \in X$. τ und τ_0 heißen *verwandt*, wenn τ_0 von τ und τ von τ_0 abhängig ist. Offenbar sind τ und τ_0 genau dann verwandt, wenn sie dieselben Niveaumengen besitzen.

Definition 1 *(Maximale Abbildung): Eine surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ heißt maximal, wenn sie jede von τ abhängige holomorphe Abbildung $\tau_0: X \to Y_0$ majorisiert, d.h. wenn zu τ_0 stets eine holomorphe Abbildung $\sigma_0: Y \to Y_0$ mit $\tau_0 = \sigma_0 \circ \tau$ existiert.*

In [36] und [38] wird bewiesen:

Ist X ein normaler komplexer Raum, so existiert zu jeder eigentlichen holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ eine mit τ verwandte maximale eigentliche holomorphe Abbildung $\alpha: X \to X'$ auf einen normalen komplexen Raum X'. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit oder reindimensional mit $d(X) \leqq r(\tau) + 1$, so ist α einfach.

Das Paar (α, X') heißt eine *komplexe Basis zur Abbildung* τ; es ist bis auf „analytische Äquivalenz" eindeutig bestimmt.

Definition 2 *(Gleichartig surjektive Abbildung, Überlagerungsabbildung): Eine eigentliche, nirgends entartete surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$, welche jede irreduzible Komponente von X auf eine irreduzible Komponente von Y abbildet, heißt gleichartig surjektiv. Sind insbesondere X, Y normale komplexe Räume, so heißt eine gleichartig surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ eine Überlagerungsabbildung.*

Es ist klar, daß eine gleichartig surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ — wegen $r_x(\tau) = d_x(X)$ für alle $x \in X$ — jede irreduzible Komponente von X auf eine irreduzible Komponente von Y der *gleichen Dimension* abbildet.

Die Bezeichnung *Überlagerungsabbildung* wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 3. *Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, so ist (X, τ, Y) eine analytische Überlagerung von Y.*

Zum Begriff der analytischen Überlagerung eines normalen komplexen Raumes sei auf [15] (dort insbesondere § 2 und § 11) sowie auf [36] verwiesen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß in Y eine nirgends dichte analytische Menge A existiert, derart, daß $\tau^{-1}(A)$ in X nirgends dicht liegt und $X-\tau^{-1}(A)$ vermöge τ lokal-topologisch auf $Y-A$ abgebildet wird (vgl. [15]); dabei darf vorausgesetzt werden, daß $d_x(X)\geqq 1$ für alle $x\in X$ — und damit auch $d_y(Y)\geqq 1$ für alle $y\in Y$ — gilt. — Sei M bzw. N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von X bzw. Y. Entweder ist M bzw. N leer oder eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge in X bzw. Y (vgl. [25]; [12], Exp. IX); entsprechendes gilt dann, da die Überlagerungsabbildung τ nirgends entartet ist, für die Menge $N_1:=\tau^{-1}(N)$ in X. Insbesondere liegt die Menge $M_1:=M\cup N_1$ in X nirgends dicht. Ist $x^{(0)}$ irgendein Punkt von $X-M_1$ und $y^{(0)}:=\tau(x^{(0)})$ sein Bildpunkt vermöge τ, so gilt $y^{(0)}\in Y-N$ und $d_{x^{(0)}}(X)=d_{y^{(0)}}(Y)=:n\geqq 1$; sind $x_1,\ldots,x_n$ bzw. $y_1,\ldots,y_n$ lokale komplexe Koordinaten in je einer geeigneten offenen zusammenhängenden Umgebung U von $x^{(0)}$ bzw. V von $y^{(0)}$, so wird τ in U durch ein System holomorpher Funktionen $y_\nu=\varphi_\nu(x_1,\ldots,x_n)$, $\nu=1,\ldots,n$, beschrieben. Die Funktionaldeterminante der φ_ν ist in U nicht identisch Null, da τ nirgends entartet ist, und sie verschwindet genau in denjenigen Punkten $x\in U$, in denen τ nicht lokal topologisch abbildet. Bezeichnet nun L die Menge aller derjenigen Punkte von X, in denen τ nicht lokal-topologisch ist, so folgt, daß L entweder leer oder eine rein 1-codimensionale analytische Menge in $X-M_1$ ist. Die abgeschlossene Hülle $\overline{L}$ von L in X ist dann entweder leer oder nach einem Satz über die Fortsetzung analytischer Mengen (vgl. [31], Satz 13 und [28], Satz 10) eine rein 1-codimensionale analytische Menge in X. Mithin ist $\overline{L}\cup M_1$ eine nirgends dichte analytische Menge in X und infolgedessen $A:=\tau(\overline{L}\cup M_1)$ eine nirgends dichte analytische Menge in Y. Offenbar ist A eine Menge der gesuchten Art.

Satz 3 ist damit bewiesen.

Definition 3 (Quasi injektive Abbildung): Eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\tau: X\to Y$, die in einer offenen und überall in X dichten Menge eineindeutig ist, heißt quasi injektiv.

Es gilt nun der folgende Faktorisierungssatz:

Satz 4. Ist X ein zusammenhängender normaler komplexer Raum und $\tau: X\to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so existieren zusammenhängende normale komplexe Räume $'X$ und $^*Y$ sowie holomorphe, mit τ gleichrangige Abbildungen $\alpha: X\to {}'X$, $\beta: {}'X\to {}^*Y$, $\gamma: {}^*Y\to Y$ mit folgenden Eigenschaften:

0) *Es gilt $\tau=\gamma\circ\beta\circ\alpha$.*

1) *α ist eigentlich, mit τ verwandt und maximal.*

2) *β ist eine Überlagerungsabbildung.*

3) *γ ist eigentlich und quasi injektiv.*

Die Faktorisierung von τ als Produkt solcher Abbildungen ist eindeutig bis auf Äquivalenz in einem naheliegenden Sinne.

Beweis. Sei $(\alpha, {}'X)$ eine komplexe Basis zu $\tau: X \to Y$. Es gibt dann eine holomorphe Abbildung $\varphi: {}'X \to Y$, derart, daß $\tau = \varphi \circ \alpha$ gilt; mit τ sind auch α und φ eigentlich. $\varphi({}'X) = \tau(X)$ ist eine irreduzible analytische Menge in Y, sie werde als komplexer Unterraum Y_0 von Y aufgefaßt. Sei $({}^*Y, \eta)$ eine Normalisierung von $Y_0 := \varphi({}'X) = \tau(X)$, ferner $\iota: Y_0 \to Y$ die Injektion von Y_0 in Y. Es werde $\gamma := \iota \circ \eta$ gesetzt; η und ι sind wieder eigentlich. Nach Satz 2 gibt es eine holomorphe und offenbar eigentliche Abbildung $\beta: {}'X \to {}^*Y$, so daß $\varphi = \gamma \circ \beta$ ist. Die Abbildungen α, β, γ haben die verlangten Eigenschaften.

Sind andererseits ${}'X_1$, ${}^*Y_1$ zusammenhängende normale komplexe Räume und $\alpha_1: X \to {}'X_1$, $\beta_1: {}'X_1 \to {}^*Y_1$, $\gamma_1: {}^*Y_1 \to Y$ Abbildungen mit den geforderten Eigenschaften, bezeichnet ferner $\eta_1: {}^*Y_1 \to Y_0 = \gamma_1({}^*Y_1) = \tau(X)$ diejenige Abbildung, für welche $\gamma_1 = \iota \circ \eta_1$ gilt, so ist notwendig das Paar $(\alpha_1, {}'X_1)$ eine komplexe Basis zu τ und das Paar $({}^*Y_1, \eta_1)$ eine Normalisierung des komplexen Unterraumes $Y_0 = \gamma_1({}^*Y_1) = \tau(X) \subset Y$. Da Normalisierungen komplexer Räume und — im Falle der Existenz — komplexe Basen zu holomorphen Abbildungen bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sind, ist auch die eindeutige Bestimmtheit der Faktorisierung von τ als Produkt von Abbildungen der beschriebenen Art bis auf Äquivalenz klar, w.z.b.w.

2.2. In diesem Abschnitt sei X stets ein zusammenhängender normaler komplexer Raum.

Wir nennen eine eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ *rein*, wenn bei einer Faktorisierung von τ gemäß Satz 4 zwei der Faktoren α, β, γ biholomorph sind. Zum Beispiel ist jede einfache eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ rein und maximal.

Es kann unter geeigneten weiteren Voraussetzungen über X vorkommen, daß jede eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ — falls auch Y als normal vorausgesetzt wird — eine Überlagerungsabbildung, also rein ist. Sicher trifft dies zu, wenn jede kompakte analytische Menge in X nulldimensional ist. Das ist u.a. für alle K-vollständigen komplexen Räume X der Fall[6]), insbesondere für Gebiete des C^n.

Auch wenn X nicht nur nulldimensionale kompakte analytische Mengen enthält, ist es möglich, daß jede nichtkonstante holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ in einen zusammenhängenden normalen komplexen Raum eine Überlagerungsabbildung ist. Es läßt sich zeigen, daß dies jedenfalls dann eintritt, wenn X und Y als kompakt und gleichdimensional vorausgesetzt werden und X hinreichend viele Holomorphismen (d.h. biholomorphe Abbildungen auf sich) zuläßt. Zur präzisen Formulierung der Aussage seien einige Bezeichnungen eingeführt. Es sei G die Holomorphismengruppe von X; G ist, versehen mit der CO-Topologie[7]), eine topologische Gruppe (wird X überdies als kompakte komplexe Mannigfaltigkeit vorausgesetzt, so ist G sogar eine

[6]) Zum Begriff des K-vollständigen Raumes vgl. [13].

[7]) Unter CO-Topologie wird die Topologie der kompakten Konvergenz (compact-open topology) verstanden: Sei $K \subset X$ kompakt, $U \subset X$ offen, dann heißt die Menge $\{g: g \in G, g(K) \subset U\}$ offen in G. Die Gesamtheit dieser Mengen erzeugt die CO-Topologie von G.

komplexe Liesche Gruppe, vgl. [6]). G_0 sei die zusammenhängende Komponente der Identität von G; die Gruppe $I(x_0) := \{g : g \in G_0,\ g(x_0) = x_0\}$ werde die *Isotropiegruppe* von $x_0 \in X$ genannt. Dann gilt:

Der komplexe Raum X sei kompakt und habe außerdem die folgende Eigenschaft:

(a) *Sind x_0, x_0' beliebige verschiedene Punkte in X, so gibt es außer X keine weitere analytische Menge in X, die x_0 und alle Punkte $g x_0'$, $g \in I(x_0)$, enthält.*

Dann ist jede holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$ von X in einen beliebigen komplexen Raum Y konstant oder überall vom Range $d(X)$ (d.h. nirgends entartet).

Dies ergibt sich aus dem folgenden

Satz (A. BLANCHARD [5], p. 160). *Der komplexe Raum X sei kompakt. Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von X in einen beliebigen komplexen Raum Y, so ist jede Abbildung $\tau \circ g$, $g \in G_0$, mit τ verwandt.*

Wir skizzieren der Vollständigkeit halber zunächst den Beweis dieses Satzes. Man muß zeigen, daß τ und $\tau \circ g$, $g \in G_0$, dieselben Niveaumengen haben. Dazu genügt es offenbar zu beweisen, daß jede Niveaumenge N von τ vermöge eines beliebigen $g \in G_0$ auf eine Niveaumenge N_g von τ abgebildet wird. Nun folgt $g(N) = N_g$ bereits, wenn $g(N) \subset N_g$, $g \in G_0$, bewiesen wird. Diese Inklusion braucht schließlich nur für Elemente g aus einer geeigneten Umgebung U der Identität verifiziert zu werden, da jedes solche U bereits G_0 erzeugt.

Sei nun $\tau(N) = y_0 \in Y$; sei W eine Umgebung von y_0, so daß eine holomorphe und injektive Abbildung φ von W in einen Zahlenraum C^r geeigneter Dimension existiert. Ist dann V eine in W enthaltene relativ-kompakte Umgebung von y_0, so ist $\tau^{-1}(V)$ eine Umgebung von N, die relativ-kompakt in $\tau^{-1}(W)$ liegt. Durch $U := \{g : g \in G, g(\tau^{-1}(V)) \subset \tau^{-1}(W)\}$ wird daher eine Umgebung U der Identität von G definiert. Wir betrachten nun für jedes $g \in U$ die holomorphe Abbildung $\varphi \circ \tau \circ g : N \to C^r$. Da N kompakt und zusammenhängend ist, besteht $(\varphi \circ \tau \circ g)(N)$ aus einem einzigen Punkt. Aus der Injektivität von φ folgt dann, daß auch $(\tau \circ g)(N) = \tau(g(N))$ einpunktig ist. Mithin ist $g(N)$ in einer Niveaumenge von τ enthalten, q.e.d.

Nunmehr folgt die oben formulierte Aussage: Ist τ nicht überall vom lokalen Range $d(X)$, so gibt es eine mindestens 1-dimensionale Niveaumenge N von τ. Sind dann $x_0, x_0' \in N$ zwei verschiedene Punkte, so gilt $g x_0' \in N$ für alle $g \in I(x_0)$, da nach dem Satz von A. BLANCHARD sicher $g(N) = N$ ist. Nach Voraussetzung ist also $N = X$, mithin ist τ konstant.

Anmerkung. Die Bedingung (a) *ist sicher dann erfüllt, wenn $I(x_0)$ für alle $x_0 \in X$ transitiv auf $X - \{x_0\}$ wirkt.* — Hieraus ergibt sich unmittelbar:

Jede nicht konstante holomorphe Abbildung $\tau : P^n \to Y$ des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes P^n in einen zusammenhängenden n-dimensionalen normalen komplexen Raum Y ist eine Überlagerungsabbildung.

Als spezielle Folgerung sei hierzu erwähnt: *Jede holomorphe Abbildung* $\tau: P^n \to \bigtimes_{\mu=1}^{m} P^{k_\mu}$ *mit* $k_\mu < n$, $\mu = 1, \ldots, n$, *ist konstant.* — Denn die holomorphe Abbildung $\pi_\mu \circ \tau: P^n \to P^{k_\mu}$, wo π_μ die Projektion von $\bigtimes_{\mu=1}^{m} P^{k_\mu}$ auf P^{k_μ} bezeichnet, ist nach obiger Aussage notwendig konstant.

2.3. Die in diesem Abschnitt auftretenden komplexen Räume X, Y seien stets als zusammenhängend und normal vorausgesetzt.

Jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ besitzt einen ganzzahligen *Abbildungsgrad* $\mathfrak{g}(\tau)$, der als die Blätterzahl der analytischen Überlagerung (X, τ, Y) definiert werden kann (diese Erklärung steht in Einklang mit den in der Topologie geläufigen Definitionen des Abbildungsgrades stetiger Abbildungen, vgl. [18], [24], [27], [34]). $\mathfrak{g}(\tau)$ stimmt also mit der Faserzahl $\mathfrak{f}(\tau)$ überein. Es ist stets $\mathfrak{g}(\tau) \geqq 1$, und $\mathfrak{g}(\tau) = 1$ gilt genau dann, wenn τ biholomorph ist.

Auch wenn nicht vorausgesetzt wird, daß X und Y gleiche Dimension haben, läßt sich einer eigentlichen holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ ein Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau)$ zuordnen: Ist $\tau = \gamma \circ \beta \circ \alpha$ eine Faktorisierung von τ gemäß Satz 4, so sei $\mathfrak{g}(\tau) := \mathfrak{g}(\beta)$ gesetzt. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, so gilt wieder $\mathfrak{g}(\tau) = \mathfrak{f}(\tau)$, da in diesem Fall (vgl. [36]) die maximale Abbildung α einfach ist.

Der Abbildungsgrad holomorpher Überlagerungsabbildungen verhält sich multiplikativ: Sind $\tau: X \to Y$ und $\sigma: Y \to Z$ derartige Abbildungen, so gilt $\mathfrak{g}(\sigma \circ \tau) = \mathfrak{g}(\sigma) \cdot \mathfrak{g}(\tau)$.

Es sei f eine im komplexen Raum X definierte holomorphe Funktion. Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung vom Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau) =: b$, und werden die in bezug auf die analytische Überlagerung (X, τ, Y) über einem Punkt $y \in Y$ gelegenen (nach ihrer Vielfachheit gezählten) b Punkte von X mit $\hat{y}^{(1)}, \ldots, \hat{y}^{(b)}$ bezeichnet, so sei

$$P(w; f, \tau) := \left(w - f(\hat{y}^{(1)})\right) \cdot \ldots \cdot \left(w - f(\hat{y}^{(b)})\right) \equiv w^b + a_1 \cdot w^{b-1} + \cdots + a_b$$

gesetzt. Die a_β, $\beta = 1, \ldots, b$, lassen sich als holomorphe Funktionen in Y auffassen; $a_\beta =: a_\beta(y)$ heiße die β-te elementarsymmetrische Funktion von f bezüglich τ. Für in X meromorphe Funktionen f ist $P(w; f, \tau)$ entsprechend zu erklären, die elementarsymmetrischen Funktionen $a_\beta(y)$ von f bezüglich τ sind dann in Y meromorph. — Die Abbildung τ induziert einen (injektiven) Homomorphismus $\overset{*}{\tau}: \mathfrak{K}(Y) \to \mathfrak{K}(X)$ des Körpers $\mathfrak{K}(Y)$ der in Y meromorphen Funktionen in den Körper $\mathfrak{K}(X)$ der in X meromorphen Funktionen. $\mathfrak{K}(X)$ kann also, da jede Funktion $f \in \mathfrak{K}(Y)$ jeweils das Polynom b-ten Grades $P(w; f, \tau)$ annuliert, als endlich-algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}(Y)$ betrachtet werden, und zwar ist der Körpergrad $[\mathfrak{K}(X) : \mathfrak{K}(Y)]$ ein Teiler von b. Ebenso kann der Ring $\mathfrak{H}(X)$ der in X holomorphen Funktionen als ein ganzer Ring endlichen Grades über dem Ring $\mathfrak{H}(Y)$ der in Y holomorphen Funktionen mit $[\mathfrak{H}(X) : \mathfrak{H}(Y)] \leqq b$ angesehen werden.

Wir vermerken:

Sind $\tau_i: X_i \to Y_i$ *holomorphe Überlagerungsabbildungen zwischen zusammenhängenden normalen komplexen Räumen,* $i = 1, 2$, *und sind* $\mu: X_2 \to X_1$, $\nu: Y_2 \to Y_1$ *eigentliche holomorphe Modifikationsabbildungen, für die gilt:* $\tau_1 \circ \mu = \nu \circ \tau_2$, *so bestehen die folgenden Gleichungen:*

$$1)\ \mathfrak{g}(\tau_1) = \mathfrak{g}(\tau_2),$$

$$2)\ [\mathfrak{R}(X_1):\mathfrak{R}(Y_1)] = [\mathfrak{R}(X_2):\mathfrak{R}(Y_2)],$$

$$3)\ [\mathfrak{J}(X_1):\mathfrak{J}(Y_1)] = [\mathfrak{J}(X_2):\mathfrak{J}(Y_2)].$$

Zum Begriff der Modifikation komplexer Räume vgl. [4], [14].

Die Gleichung 1) ist evident. 2) und 3) ergeben sich sofort aus der Tatsache, daß die Abbildungen ν, μ Körperisomorphismen $\overset{*}{\nu}: \mathfrak{R}(Y_1) \to \mathfrak{R}(Y_2)$, $\overset{*}{\mu}: \mathfrak{R}(X_1) \to \mathfrak{R}(X_2)$ und analog Ringisomorphismen induzieren, die zusammen mit den von den Abbildungen $\overset{*}{\tau}_1$, $\overset{*}{\tau}_2$ induzierten injektiven Körper- bzw. Ringhomomorphismen $\overset{*}{\tau}_1$, $\overset{*}{\tau}_2$ der Gleichung $\overset{*}{\tau}_2 \circ \overset{*}{\nu} = \overset{*}{\mu} \circ \overset{*}{\tau}_1$ genügen.

Wir notieren ferner:

Ist $\tau: C^n \to C^n$ *eine holomorphe Überlagerungsabbildung, die durch ein System*

$$w_\nu = P_\nu(z_1, \ldots, z_n), \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

von homogenen Polynomen P_ν *beschrieben werden kann, so gilt:* $\mathfrak{g}(\tau) = \prod_{\nu=1}^{n} \operatorname{grad} P_\nu$.

Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Bézoutschen Theorem (vgl. [26], p. 292).

Beispiel. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} w_1 &= -(z_1 + \cdots + z_n) \\ w_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n \\ &\vdots \\ w_n &= (-1)^n z_1 \ldots z_n \end{aligned}$$

wird eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: C^n \to C^n$ mit $\mathfrak{g}(\tau) = n!$ definiert.

2.4. Die surjektiven und quasi injektiven eigentlichen holomorphen Abbildungen können in einfacher Weise charakterisiert werden. Es gilt:

Eine surjektive eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ *ist genau dann quasi injektiv, wenn die zugehörige holomorphe Abbildung* $\tau_0^*: X^* \to Y_0^*$ (vgl. *Satz* 2) *biholomorph ist.*

In der Tat! Ist τ_0^* biholomorph, so ist trivial, daß τ quasi injektiv ist. Ist umgekehrt τ quasi injektiv, so ist auch τ_0^* quasi injektiv und eigentlich. Das Tripel (X^*, τ_0^*, Y_0^*) ist mithin eine einblättrige analytische Überlagerung von Y_0^*. Das bedeutet aber, daß τ_0^* biholomorph abbildet.

Es folgt unmittelbar: *Jede surjektive und quasi injektive eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ zwischen lokal-irreduziblen Räumen ist bijektiv.*

Für holomorph vollständige komplexe Räume X, Y ist die Frage nach der Existenz injektiver eigentlicher holomorpher Abbildungen $\tau: X \to Y$ von Wichtigkeit. Es läßt sich zeigen (vgl. [29]):

Jeder holomorph-vollständige lokal-irreduzible Raum X läßt sich in einen Zahlenraum C^N, wo N hinreichend groß ist, einbetten, d.h. es gibt eine holomorphe eigentliche injektive Abbildung $\tau: X \to C^N$.

§ 3. Überlagerungsabbildungen

3.1. In diesem und den weiteren Paragraphen werden vor allem die folgenden Probleme in besonderen Fällen studiert. Vorgegeben sind zwei zusammenhängende normale komplexe Räume X, Y gleicher Dimension. a) Wann läßt sich X gleichartig surjektiv auf Y abbilden, d.h. wann kann X als analytische Überlagerung von Y realisiert werden? Wie weit kann man den Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau)$ einer solchen Abbildung τ, d.h. die Blätterzahl, vorschreiben? Offenbar liegt das Hauptproblem der klassischen Abbildungstheorie vor, wenn $\mathfrak{g}(\tau) = 1$ vorgeschrieben wird. Wann tritt nur dieser Fall auf? b) Auf wieviele Arten läßt sich gegebenenfalls X als analytische Überlagerung von Y darstellen?

Die vorstehenden Fragen interessieren auch für den Fall $X = Y$. Wann ist insbesondere X „starr" in bezug auf holomorphe Überlagerungsabbildungen auf sich? Zu diesen Problemen soll eine Reihe von Aussagen angegeben werden, die zum Teil ältere, auf den Fall $\mathfrak{g}(\tau) = 1$ bezugnehmende Aussagen umfassen.

3.2. Zur Frage a) läßt sich sogleich eine auf H. HOPF [18] zurückgehende notwendige topologische Bedingung aussprechen. Alle auftretenden komplexen Räume X, Y seien zusammenhängend und normal, es gelte $d(X) = d(Y)$. Mit $p_\nu(X)$ bzw. $p_\nu(Y)$ werde die ν-te Bettische Zahl von X bzw. Y bezeichnet.

Satz 5. Sind X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten, so gibt es höchstens dann eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$, wenn der Divisionshomologiering $D(X)$ einen zum Divisionshomologiering $D(Y)$ dimensionstreu isomorphen Unterring enthält. Werden X und Y nicht als singularitätenfrei vorausgesetzt, so ist für die Existenz einer holomorphen Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ wenigstens notwendig, daß $p_\nu(X) \geqq p_\nu(Y)$ für alle ν ist.

Für den Fall kompakter topologischer Mannigfaltigkeiten und stetiger Abbildungen mit von 0 verschiedenem Abbildungsgrad wurde die entsprechende Aussage von H. HOPF bewiesen ([18], p. 81). Später hat DE RHAM ([27], p. 97) den Fall beliebiger, nicht notwendig kompakter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten der Klasse C^∞ behandelt. Der Beweis von Satz 5 kann im Rahmen der Topologie mit klassischen Methoden erbracht werden; wir verzichten hier auf die Durchführung.

Als elementare Folgerung aus Satz 5 ergibt sich z.B., daß der Einheitskreis nicht gleichartig surjektiv in einen Kreisring und eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht p nicht gleichartig surjektiv in eine

kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $q>p$ abbildbar ist[8]). Eine Verschärfung dieser letzten Aussage erhält man übrigens wie bekannt (vgl. [24]) unmittelbar aus der Hurwitzschen Formel

$$2p-2=\mathfrak{g}(\tau)\cdot(2q-2)+v,$$

worin $\tau: X\to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung der kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht p in die kompakte Riemannsche Fläche Y vom Geschlecht q bezeichnet und v die Verzweigungszahl von τ ist; aus ihr folgt

$$p\geqq\mathfrak{g}(\tau)\cdot(q-1)+1,$$

insbesondere also $p\geqq q$ wegen $\mathfrak{g}(\tau)\geqq 1$. Ferner ist

$$\mathfrak{g}(\tau)\leqq\frac{p-1}{q-1}\quad\text{für}\quad q>1,$$

so daß in diesem Fall der Abbildungsgrad nach oben durch p, q beschränkt ist. Ist z. B. $p=rq$ mit $1\leqq r<q$, so ergibt sich, daß X höchstens r-blättrig Y analytisch überlagert werden kann; insbesondere folgt im Falle $p=q>1$, daß eine holomorphe Abbildung $\tau: X\to Y$ notwendig biholomorph oder konstant ist.

Auch im Falle 2-dimensionaler projektiv-algebraischer Räume sind die Möglichkeiten der Existenz holomorpher Überlagerungsabbildungen sehr eingeschränkt. An Stelle der Hurwitzschen Formel kann man sich z. B. auf eine von E. KÄHLER [22] hergeleitete Relation beziehen, um einschränkende Bedingungen zu finden.

Wenn auch eine Riemannsche Fläche im allgemeinen nicht eigentlich und holomorph in eine weitere vorgegebene Riemannsche Fläche abbildbar ist, so finden sich doch in speziellen Fällen, in der Literatur verstreut, positive Aussagen. Bekanntlich gestattet jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht p eine holomorphe Abbildung τ in die Riemannsche Zahlenkugel P vom Abbildungsgrad $p+1$. Nach A. BRILL und M. NOETHER [7] gilt sogar: *Ist* $p\equiv 0(2)$, *so gibt es ein* $\tau: X\to P^1$ *mit* $\mathfrak{g}(\tau)\leqq\frac{p}{2}+1$; *ist* $p\equiv 1(2)$, *so gibt es ein* $\tau: X\to P^1$ *mit* $\mathfrak{g}(\tau)\leqq\frac{p+1}{2}+1$.

Ferner hat L. AHLFORS (vgl. [1], p. 124) gezeigt:

Ist X eine von $k\geqq 1$ geschlossenen analytischen Kurven berandete Riemannsche Fläche vom Geschlecht p, so gibt es eine eigentliche holomorphe Abbildung τ von X in den Einheitskreis vom Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau)\leqq 2p+k$. Für jede solche Abbildung gilt $\mathfrak{g}(\tau)\geqq k$.

[8]) Für $p=0$ folgt speziell: Ist die Zahlenkugel P^1 einer Riemannschen Fläche Y analytisch überlagert, so ist auch Y eine Zahlenkugel. Das ist der klassische Satz von LÜROTH, der besagt, daß jeder Unterkörper eines Körpers $C(x)$ in einer Unbestimmten x über C, der von C verschieden ist, eine rein transzendente Erweiterung von C ist.

Jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ zwischen zusammenhängenden normalen komplexen Räumen induziert einen (im allgemeinen nicht injektiven) Homomorphismus $\hat{\tau}: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \tau(x_0))$ der Fundamentalgruppen ($x_0 \in X$ sei ein beliebig gewählter Bezugspunkt). Ist $j(\tau)$ der Index der Untergruppe $\hat{\tau}(\pi_1(X, x_0))$ von $\pi_1(Y, \tau(x_0))$, so gehört zu $\hat{\tau}(\pi_1(X, x_0))$ eine $j(\tau)$-blättrige unverzweigte unbegrenzte Überlagerung (X', φ, Y) von Y, derart, daß die Fundamentalgruppe des komplexen Raumes X' zu $\hat{\tau}(\pi_1(X, x_0))$ isomorph ist (φ ist eine holomorphe lokal-topologische Abbildung). Die Abbildung τ läßt sich dann zu einer Abbildung $\tau': X \to X'$ liften, die offenbar holomorph und wegen $\tau = \varphi \circ \tau'$ eigentlich und mit τ verwandt, also nirgends entartet ist; τ' ist demnach eine holomorphe Überlagerungsabbildung. Es folgt, daß auch φ eine holomorphe Überlagerungsabbildung ist, und zwar ist $\mathfrak{g}(\varphi) = j(\tau)$. Mithin ist $j(\tau)$ endlich, und es gilt $\mathfrak{g}(\tau) = j(\tau) \cdot \mathfrak{g}(\tau')$. Hierin ist eine weitere notwendige Bedingung für die Existenz von holomorphen Überlagerungsabbildungen $\tau: X \to Y$ — insbesondere zu vorgeschriebenem $\mathfrak{g}(\tau)$ — enthalten (vgl. hierzu [18], p. 86). Wird etwa $\mathfrak{g}(\tau)$ als Primzahl p vorgeschrieben, so ist $j(\tau) = p$ oder $j(\tau) = 1$; entweder muß dann $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Untergruppe vom Index p von $\pi_1(Y, \tau(x_0))$ isomorph sein, oder $\pi_1(Y, \tau(x_0))$ ist notwendig zu einer Faktorgruppe von $\pi_1(X, x_0)$ isomorph. — Eine andere Folgerung ist z.B.: Ist X einfachzusammenhängend und existiert eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$, so ist die Ordnung der Fundamentalgruppe von Y endlich und ein Teiler von $\mathfrak{g}(\tau)$; sind überdies X und Y Riemannsche Flächen, so sind X und Y konform äquivalent.

3.3. In diesem Abschnitt geben wir analytische Bedingungen für die Existenz einer holomorphen Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ an.

Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung mit $\mathfrak{g}(\tau) =: b$, so werde jeder holomorphen Abbildung $\varphi: X \to C^s(z_1, \ldots, z_s)$ eine „elementarsymmetrische Abbildung $\varepsilon_\varphi: Y \to C^{sb}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{sb})$ bezüglich τ" wie folgt zugeordnet: Wird φ durch die Zuordnung

$$x \to (z_1, \ldots, z_s) = \big(f_1(x), \ldots, f_s(x)\big), \qquad x \in X,$$

gegeben und ist jeweils $a_\beta^{(\sigma)}(y)$ $(\beta = 1, \ldots, b;\ \sigma = 1, \ldots, s)$ die β-te elementarsymmetrische Funktion der holomorphen Funktion f_σ bezüglich τ (vgl. 2.3), so sei ε_φ definiert durch die Zuordnung

$$y \to (\zeta_1, \ldots, \zeta_b, \ldots, \zeta_{(s-1)\cdot b+1}, \ldots, \zeta_{sb}) = \big(a_1^{(1)}(y), \ldots, a_b^{(1)}(y), \ldots, a_1^{(s)}(y), \ldots, a_b^{(s)}(y)\big).$$

Wir beweisen zunächst:

Satz 6. Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung und $\varphi: X \to C^s$ eine beliebige holomorphe Abbildung, so gilt für jeden Punkt $x \in X$:

$$r_x(\varphi) \leqq r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi).$$

Beweis. Sei $x \in X$ irgendein Punkt. Wir bezeichnen mit E bzw. F die Faser von φ bzw. ε_φ durch x bzw. $\tau(x)$ und haben dann lediglich zu zeigen:

$d_x(E) \geqq d_{\tau(x)}(F)$. Es seien (Y_1, η) bzw. (X_1, ξ) Normalisierungen von F bzw. $\tau^{-1}(F)$, ferner ι bzw. ι_1 die Injektionen von F in Y bzw. von $\tau^{-1}(F)$ in X. Die Abbildung $\varphi \circ \iota_1 \circ \xi : X_1 \to C^s$ wird durch die in X_1 holomorphen Funktionen $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ beschrieben, wenn mit f_σ wie oben die φ definierenden holomorphen Funktionen bezeichnet sind ($\sigma = 1, \ldots, s$). Ist

$$P(w; f_\sigma, \tau) = w^b + \sum_{\beta=1}^{b} a_\beta^{(\sigma)} w^{b-\beta},$$

das zu f_σ gehörende Polynom (vgl. 2.3), so annulliert $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ notwendig das Polynom

$$w^b + \sum_{\beta=1}^{b} (a_\beta^{(\sigma)} \circ \iota \circ \eta)\, w^{b-\beta}.$$

Da ε_φ gerade durch die sb in Y holomorphen Funktionen $a_\beta^{(\sigma)}$, $\beta = 1, \ldots, b$; $\sigma = 1, \ldots, s$, gegeben wird und F die Faser von ε_φ durch $\tau(x)$ ist, so sind alle Funktionen $a_\beta^{(\sigma)} \circ \iota \circ \eta$ auf Y_1 konstant. Daher ist jeweils $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ eine holomorphe Funktion auf X_1, die nur endlich viele Werte annehmen kann. Das ist nur möglich, wenn $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ auf jeder zusammenhängenden Komponente von X_1 konstant ist. Mithin bildet $\varphi \circ \iota_1 \circ \xi$ jede Komponente von X_1 auf einen einzigen Punkt im C^s ab. Dann ist aber jede zusammenhängende Komponente von $\tau^{-1}(F)$ in einer Faser von φ enthalten. Mithin umfaßt E die zusammenhängende Komponente von $\tau^{-1}(F)$ durch x. Hieraus folgt $d_x(E) \geqq d_{\tau(x)}(F)$, w.z.b.w.

Anmerkung. Im allgemeinen gilt: $r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi) > r_x(\varphi)$. Gilt jedoch $r_x(\varphi) = d(X)$, so folgt $r_x(\varphi) = r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi)$, da $d(X) = d(Y)$ und $r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi) \leqq d(Y)$.

Satz 6 gestattet einfache Anwendungen. Ist X irgendein komplexer Raum, so sei mit $m(X)$ bzw. $m_b(X)$ die Maximalzahl analytisch unabhängiger holomorpher Funktionen bzw. analytisch unabhängiger beschränkter holomorpher Funktionen in X bezeichnet.

Dann gilt:

Satz 7. Es gibt höchstens dann eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau : X \to Y$, wenn $m(X) = m(Y)$ und $m_b(X) = m_b(Y)$.

Beweis. Es sei $\tau : X \to Y$ eine Überlagerungsabbildung . Da τ einen injektiven Homomorphismus des Ringes der in Y holomorphen Funktionen in den Ring der in X holomorphen Funktionen induziert, so folgt sofort: $m(X) \geqq m(Y)$, $m_b(X) \geqq m_b(Y)$. Aus Satz 6 ergibt sich aber: $m(X) \leqq m(Y)$ bzw. $m_b(X) \leqq m_b(Y)$ (man beachte, daß ε_φ eine beschränkte Abbildung ist, wenn φ beschränkt ist). Damit ist Satz 7 bereits bewiesen.

Wir geben einfache Beispiele zu Satz 7.

1. Sind G^n bzw. G^m Gebiete des C^n bzw. C^m, so gibt es höchstens dann eine gleichartig surjektive holomorphe Abbildung von $G^n \times P^r$ in $G^m \times P^s$, wenn $n = m$ ist.

2. Der Einheitskreis läßt sich nicht eigentlich holomorph in die Gaußsche Zahlenebene abbilden. — Dagegen gibt es eigentliche holomorphe Abbildungen des Einheitskreises in den C^2 [9]). Weiter gibt es singularitätenfreie „hyperbolische" Kurven im C^2. Nach einer mündlichen Mitteilung von E. CALABI besitzt z. B. die durch die Gleichung $e^z = \operatorname{tg} w + \frac{1}{\cos w}$ im $C^2(w, z)$ gegebene komplexe Untermannigfaltigkeit den Einheitskreis als universelle Überlagerung.

3. Es gibt komplexe Mannigfaltigkeiten X^n vom topologischen Typus des Innern der $2n$-dimensionalen Zelle mit $m(X^n) = 0$; kein Gebiet des C^n ist eigentlich und holomorph in eine solche Mannigfaltigkeit X^n abbildbar. Beispiele für Mannigfaltigkeiten X^n dieser Art sind von E. CALABI und B. ECKMANN [8] angegeben worden. Auf dem folgenden einfachen Wege gelangt man zu weiteren Beispielen: Es sei P_∞^{n-1} eine $(n-1)$-dimensionale Ebene des P^n; P_∞^{n-1} werde als unendlich ferne Ebene in bezug auf den $C^n := P^n - P_\infty^{n-1}$ aufgefaßt. Sei $x_0 \in P_\infty^{n-1}$ irgendein Punkt. Wir legen um x_0 eine abgeschlossene Hyperkugel H (bzgl. einer lokalen komplexen Karte) und bilden H topologisch so auf sich ab, daß der Rand ∂H punktweise festbleibt und das Bild S des Ebenenstücks $\mathring{H} \cap P_\infty^{n-1}$ punktfremd zu $\mathring{H} \cap P_\infty^{n-1}$ ist. Dann ist $X^n := P^n - \left((P_\infty^{n-1} - (H \cap P_\infty^{n-1})) \cup S\right)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit vom topologischen Typ des Innern der $2n$-dimensionalen Zelle. Es gilt notwendig $m(X^n) = 0$. Ist nämlich f in X^n holomorph, so folgt mit Hilfe eines klassischen Satzes von F. HARTOGS, daß f in jeden Punkt von S eindeutig holomorph fortsetzbar ist und somit im $C^n = P^n - P_\infty^{n-1}$ holomorph ist. Da überdies f in $\mathring{H} \cap P_\infty^{n-1}$ holomorph ist, ergibt sich mittels des Kontinuitätssatzes die Holomorphie von f auf der ganzen unendlich fernen Ebene P_∞^{n-1}. Mithin ist f im P^n holomorph und daher konstant.

4. Das Gebiet $X := \{(w, z) : |w|^\alpha |z|^\beta < 1;\ \alpha, \beta > 0, \text{ganz}\} < C^2(w, z)$ läßt sich nicht gleichartig surjektiv auf das Gebiet $Y := \{(w, z) : |w|^\gamma |z|^\delta < 1;\ \gamma, \delta > 0, \gamma \cdot \delta^{-1} \text{ irrational}\} < C^2(w, z)$ abbilden und umgekehrt. — Der Beweis wird erbracht sein, wenn wir zeigen: $m_b(X) \geqq 1$, $m_b(Y) = 0$. Sicher gilt $m_b(X) \geqq 1$; denn $f(w, z) := w^\alpha z^\beta$ ist in X beschränkt und nicht konstant. In Y ist dagegen jede holomorphe beschränkte Funktion konstant, was sich folgendermaßen einsehen läßt: Sei f eine beschränkte holomorphe Funktion in Y. Wir betrachten die durch die Gleichung

$$w^\gamma z^\delta = 1 - \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

---

[9]) Schon 1931 hat H. CARTAN [Sur les variétés définis par une relation entière; Bull. Sci. Math. **55**, 47–64 (1931), vgl. insb. p. 63] nach einer Idee von VALIRON eine eigentliche holomorphe Abbildung des Einheitskreises in den C^2 angegeben; der Nachweis stützt sich auf Sätze von FATOU über Funktionalgleichungen. — Übrigens läßt sich zeigen, daß jede nichtkompakte Riemannsche Fläche eigentlich in den C^3 abbildbar ist; ob auch in den C^2, bleibt offen.

in Y gegebene Menge M_ε. Diese Menge ist nicht analytisch in Y. Bezeichnet jedoch $(D, \pi, C^2 - \{(w,z): wz = 0\})$ die universelle Überlagerung von $C^2 - \{(w,z): wz = 0\}$, wobei wir uns D mit der von π induzierten natürlichen komplexen Struktur versehen denken, so ist $\hat{M}_\varepsilon := \pi^{-1}(M_\varepsilon)$ eine analytische Menge in D. Jede irreduzible Komponente von $\hat{M}_\varepsilon$ ist analytisch isomorph zur Gaußschen Zahlenebene. Daher ist $f \circ \pi$ auf $\hat{M}_\varepsilon$ konstant. Mithin ist f auf M_ε und dann auch auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{M_\varepsilon}$ von M_ε in Y konstant. $\overline{M_\varepsilon}$ wird aber durch die Gleichung $|w|^\gamma |z|^\delta = 1 - \varepsilon$ beschrieben und ist folglich topologisch-3-dimensional. Daraus folgt, daß f in ganz Y konstant ist.

Wir bemerken noch:

Satz 8. *Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, so gelten folgende Aussagen:*

a) *X ist genau dann K-vollständig, wenn Y es ist.*
b) *X ist genau dann holomorph-konvex, wenn Y es ist.*
c) *X ist genau dann konvex bezüglich q-dimensionaler analytischer Mengen, wenn Y es ist*[10]).
d) *Ist X holomorph-separabel, so auch Y.*
e) *X ist genau dann holomorph-vollständig, wenn Y es ist.*
f) *X ist genau dann projektiv-algebraisch, wenn Y es ist.*

Der Beweis von a) folgt unmittelbar aus der Anmerkung zu Satz 6; die Beweise von b) und d) ergeben sich direkt, e) folgt nach H. GRAUERT [*12*] aus a) und b); zum Beweise von c) ziehe man den allgemeinen Projektionssatz für analytische Mengen [*28*] heran. Der Beweis von f) ist tiefliegend und wird in [*16*] gegeben.

Die in 3.1. gestellte Frage b) wird in Spezialfällen in den folgenden Paragraphen behandelt. Hier sei lediglich noch auf den besonders einfachen Fall der holomorphen Überlagerungsabbildungen des Einheitskreises auf sich eingegangen. Es gilt:

Jede eigentliche holomorphe Abbildung τ des Einheitskreises $\{z: |z| < 1\}$ der z-Ebene in sich wird durch eine holomorphe Funktion $f(z)$ der Gestalt

$$f(z) = e^{i\vartheta} \prod_{\beta=1}^{b} \frac{z - z^{(\beta)}}{\bar{z}^{(\beta)} z - 1}, \quad \vartheta \text{ reell}, \ |z^{(\beta)}| < 1, \ \beta = 1, \ldots, b,$$

vermittelt und umgekehrt; dabei ist b der Abbildungsgrad von τ.

Funktionen $f(z)$ der angegebenen Art werden als *Einheitsfunktionen vom Grade b* bezeichnet, *Einheitsfunktionen vom Grade* 0 sind die Konstanten vom Betrage 1 (vgl. [*9*], p. 12).

Daß jede Einheitsfunktion $f(z)$ vom Grade $b \geqq 1$ eine eigentliche holomorphe Abbildung τ des Einheitskreises in sich mit $\mathfrak{g}(\tau) = b$ definiert, ist klar.

---

[10]) Wir nennen einen komplexen Raum X konvex bzgl. q-dimensionaler analytischer Mengen, wenn es eine Ausschöpfung von X durch eine Folge $\{K_\nu\}$ kompakter Mengen K_ν gibt, so daß folgendes gilt: Ist $x \in X - K_\nu$ ein beliebiger Punkt, so gibt es eine analytische Menge A in X mit $d_x(A) \geqq q$, die nicht in K_ν eindringt, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Umgekehrt läßt sich jedenfalls jede solche Abbildung τ durch eine im Einheitskreis holomorphe Funktion $f(z)$ beschreiben. Ist $\{z^{(1)}, \ldots, z^{(b)}\}$, $b = \mathfrak{g}(\tau)$, die Urbildmenge des Nullpunktes (jedes Urbild ist gemäß seiner Vielfachheit gezählt), so hat $f(z)$ gerade in den Punkten $z^{(1)}, \ldots, z^{(b)}$ Nullstellen; der Quotient

$$\psi(z) := \frac{f(z)}{\prod_{\beta=1}^{b} \frac{z - z^{(\beta)}}{\overline{z}^{(\beta)} z - 1}}$$

ist daher im Einheitskreis holomorph und nullstellenfrei. Da τ eigentlich abbildet, strebt $|f(z)|$ stets gegen 1, wenn $|z|$ gegen 1 strebt. Gleiches trifft dann aber auch für $\psi(z)$ und $\frac{1}{\psi(z)}$ zu, es gilt also $|\psi(z)| \leqq 1$ und $\left|\frac{1}{\psi(z)}\right| \leqq 1$ für $|z| < 1$; mithin ist $|\psi(z)| \equiv 1$. $\psi(z)$ ist daher Einheitsfunktion vom Grade 0 und infolgedessen $f(z)$ Einheitsfunktion vom Grade b mit den Nullstellen $z^{(1)}, \ldots, z^{(b)}$.

§ 4. Fortsetzungs- und Konvergenzeigenschaften von Überlagerungsabbildungen

4.1. Sei Z ein zusammenhängender normaler komplexer Raum. Ein Tripel $\mathfrak{X} = \langle X, \xi, Z\rangle$ heißt ein *unverzweigtes Riemannsches Gebiet über* Z, wenn X ein zusammenhängender normaler komplexer Raum und $\xi: X \to Z$ eine holomorphe lokal-topologische Abbildung ist. Es ist stets eine *Holomorphiehülle* $H(\mathfrak{X}) = \langle {}'X, {}'\xi, Z\rangle$ von $\mathfrak{X}$ als unverzweigtes Riemannsches Gebiet über Z definiert, und es gibt eine natürliche holomorphe Abbildung $i: X \to {}'X$ mit $\xi = {}'\xi \circ i$. $H(\mathfrak{X})$ ist eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz in folgendem Sinne: Ist $\widetilde{H}(\mathfrak{X}) = \langle {}'\widetilde{X}, {}'\tilde{\xi}, Z\rangle$ eine weitere Holomorphiehülle von X und $\tilde{i}: X \to {}'\widetilde{X}$ die zugehörige natürliche holomorphe Abbildung, so existiert eine biholomorphe Abbildung $\varphi: {}'X \to {}'\widetilde{X}$, derart, daß $\tilde{i} = \varphi \circ i$ und ${}'\xi = {}'\tilde{\xi} \circ \varphi$ gilt. Äquivalente Holomorphiehüllen werden als gleich betrachtet, und es ist üblich, von *der* Holomorphiehülle $H(\mathfrak{X})$ zu sprechen. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn X offener Teilraum von Z und ξ die Injektion von X in Z ist. Gilt außerdem für $H(\mathfrak{X}) = \langle {}'X, {}'\xi, Z\rangle$, daß ${}'\xi: {}'X \to Z$ eineindeutig ist, so kann ${}'X$ mit dem offenen Teilraum ${}'\xi({}'X)$ von Z identifiziert werden; es wird dann einfach ${}'X$ als die Holomorphiehülle von X bezeichnet[11].

Es seien $\mathfrak{X} = \langle X, \xi, C^{n_1}\rangle$ und $\mathfrak{Y} = \langle Y, \eta, C^{n_2}\rangle$ unverzweigte Riemannsche Gebiete über dem C^{n_1} bzw. über dem C^{n_2}, ferner $H(\mathfrak{X}) = \langle {}'X, {}'\xi, C^{n_1}\rangle$ und $H(\mathfrak{Y}) = \langle {}'Y, {}'\eta, C^{n_2}\rangle$ die Holomorphiehüllen von $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$; $i: X \to {}'X$ bzw. $j: Y \to {}'Y$ seien die zugehörigen natürlichen holomorphen Abbildungen. Ist $\tau: X \to Y$ irgendeine holomorphe Abbildung, so läßt sich τ in eindeutiger Weise zu einer holomorphen Abbildung ${}'\tau: {}'X \to {}'Y$ fortsetzen, d.h. es wird $j \circ \tau = {}'\tau \circ i$. Weiter gilt (vgl. H. KERNER [23]):

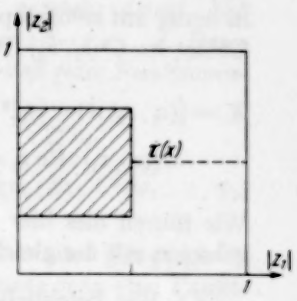
Sind $\mathfrak{X} = \langle X, \xi, C^n\rangle$ *und* $\mathfrak{Y} = \langle Y, \eta, C^n\rangle$ *unverzweigte Riemannsche Gebiete über dem* C^n *und ist* $\tau: X \to Y$ *eine eigentliche holomorphe Abbildung, so ist*

[11] Zum Begriff der Holomorphiehülle und ihrer Eigenschaften vgl. [3], [12], [21], [23] und [33].

auch $'\tau: {}'X \to {}'Y$ *eigentlich. Ferner ist* $'\tau({}'X - i(X)) = {}'Y - j(Y)$, *und die durch Beschränkung von* $'\tau$ *bestimmte Abbildung* $\tilde{\tau}: {}'X - i(X) \to {}'Y - j(Y)$ *ist ebenfalls eigentlich.*

In dieser Aussage ist wesentlich, daß $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Riemannsche Gebiete gleicher Dimension sind. Gilt $d(Y) > d(X)$, so wird sie falsch, wie etwa folgendes Beispiel zeigt (vgl. Figur):

Es sei $\mathfrak{X} := \langle X, \xi, C^1(z_1)\rangle$ mit $X := \{z_1 : \frac{1}{2} < |z_1| < 1\}$, $\xi :=$ Injektion $X \to C^1(z_1)$; $\mathfrak{Y} := \langle Y, \eta, C^2(z_1, z_2)\rangle$ mit $Y := \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\} - \{(z_1, z_2) : |z_1| \leqq \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \leqq |z_2| \leqq \frac{3}{4}\}$, $\eta :=$ Injektion $Y \to C^2(z_1, z_2)$. $\tau: X \to Y$ sei die eigentliche holomorphe Abbildung $z_1 \to (z_1, \frac{1}{2})$. Da $'X = X$, $'Y = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$, so ist $'\tau: {}'X \to {}'Y$ nicht eigentlich.



4.2. Mit Hilfe der oben zitierten Aussage läßt sich in manchen Fällen nachweisen, daß der Abbildungsgrad einer eigentlichen holomorphen Abbildung 1 ist. So gilt:

Satz 9. *Es sei* X *ein beschränktes Holomorphiegebiet im* C^n, $n \geqq 2$, *und* K *eine kompakte, mindestens topologisch-*$(2n-1)$*-dimensionale Teilmenge von* X. *Dann ist jede holomorphe Überlagerungsabbildung* $\tau: X - K \to X - K$ *ein Holomorphismus von* $X - K$, *der durch Beschränkung eines Holomorphismus* $'\tau: X \to X$ *mit* $'\tau(K) = K$ *entsteht.*

Beweis. Mit Hilfe eines bekannten Satzes von HARTOGS-OSGOOD folgt zunächst, daß X die Holomorphiehülle von $X - K$ ist. Nach der in 4.1. zitierten Aussage ist τ somit zu einer holomorphen Überlagerungsabbildung $'\tau: X \to X$ fortsetzbar; es gilt $'\tau(K) = K$. Wir betrachten die Iterierten $'\tau^{(\nu)}$ der Abbildung $'\tau$, $\nu = 1, 2, \ldots$ (es ist gesetzt $'\tau^{(1)} := {}'\tau$, $'\tau^{(\nu)} := {}'\tau \circ {}'\tau^{(\nu-1)}$ für $\nu > 1$). Da X beschränkt ist, bilden die $'\tau^{(\nu)}$ eine normale Familie im Sinne von MONTEL. Infolgedessen gibt es eine Teilfolge $'\tau^{(\eta)}$ der $'\tau^{(\nu)}$, die kompakt gegen eine holomorphe Abbildung $\sigma: X \to \overline{X}$, $\overline{X} :=$ abgeschlossene Hülle von X in C^n, konvergiert [12]). Notwendig gilt $\sigma(K) \subset K$, wir behaupten überdies: $\sigma(K) = K$. Ist nämlich $z_0 \in K$ irgendein Punkt, so gibt es jedenfalls Punkte $z_{\nu_j} \in K$ mit $'\tau^{(\eta)}(z_{\nu_j}) = z_0$. Dann ist aber jeder Häufungspunkt $z^* \in K$ der Folge $\{z_{\nu_j}\}$ ein σ-Urbild von z_0, da die kompakte Konvergenz die stetige Konvergenz nach sich zieht.

Aus Satz 1 ergibt sich nun, da K mindestens topologisch-$(2n-1)$-dimensional ist: $\nu(\sigma) = n$. Dann folgt aus einem Satz von H. CARTAN ([*10*], théorème 4, p. 770), daß σ und $'\tau$ Holomorphismen von X sind. Wegen $'\tau(K) = K$ muß dann aber auch τ ein Holomorphismus von $X - K$ sein, w.z.b.w.

Aus Satz 9 folgt, da alle Holomorphismen von beschränkten eigentlichen Reinhardtschen Körpern im C^n linear sind:

---

[12]) Sind R, R_1 topologische Räume, so heißt eine Folge von Abbildungen $\varphi_\nu: R \to R_1$ kompakt konvergent gegen eine Abbildung $\varphi: R \to R_1$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $K \subset R$ kompakt, $U_1 \subset R_1$ offen und gilt $\varphi(K) \subset U_1$, so gilt $\varphi_\nu(K) \subset U_1$ für fast alle ν. — Vgl. auch [7]).

Ist D ein eigentlicher Reinhardtscher Körper, der relativ-kompakt in einem beschränkten Holomorphiegebiet $X \subset C^n$, $n \geqq 2$, liegt, so ist jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X - \overline{D} \to X - \overline{D}$ linear.

Man kann diese Aussage benutzen, um Gebiete im C^n vom topologischen Typus des Innern der $2n$-dimensionalen Zelle zu konstruieren, die „starr" in bezug auf holomorphe Überlagerungsabbildungen auf sich sind. Ein solches Gebiet im $C^2(z_1, z_2)$ ist z. B.

$$X := \{(z_1, z_2): (1 < |z_1|^2 + |z_2|^2 < 4\} - \big(\{(z_1, z_2): z_1 = 0, \operatorname{Re} z_2 = 0, 1 < \operatorname{Im} z_2 < 2\} \cup$$
$$\cup \{(z_1, z_2): \operatorname{Re} z_1 = 0, 1 < \operatorname{Im} z_1 < \tfrac{3}{2}, z_2 = 0\}\big).$$

Wir führen dies hier nicht näher aus, da wir in § 6 sogar zu Holomorphiegebieten mit der gleichen Eigenschaft gelangen werden.

4.3. Wir beschließen diesen Paragraphen mit einem einfachen Satz über konvergente Folgen von holomorphen Überlagerungsabbildungen.

Satz 10. *Es sei $\tau_\nu: X \to Y$ eine Folge von holomorphen Überlagerungsabbildungen, die kompakt gegen eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ konvergiert. Dann gilt für fast alle ν: $\mathfrak{g}(\tau_\nu) \geqq \mathfrak{g}(\tau)$. Ist X kompakt, so gilt sogar $\mathfrak{g}(\tau_\nu) = \mathfrak{g}(\tau)$ für fast alle ν.*

Beweis. Wir setzen $b := \mathfrak{g}(\tau)$. Es sei $y \in Y$ ein uniformisierbarer Punkt von Y mit b verschiedenen τ-Urbildern $x_1, \ldots, x_b \in X$; dann sind $x_1, \ldots, x_b$ uniformisierbare Punkte von X. Es lassen sich eine offene Umgebung V von y und paarweise disjunkte offene Umgebungen U_β von x, $\beta = 1, \ldots, b$, wählen, so daß jeweils $\tau(U_\beta) = V$ gilt und die durch Beschränkung von τ bestimmten Abbildungen $U_\beta \to V$ biholomorph sind. Die erste Behauptung „$\mathfrak{g}(\tau_\nu) \geqq b$ für fast alle ν" ist nun enthalten in folgender Aussage:

Jeder der Punkte x_β besitzt eine offene Umgebung $W_\beta \subset U_\beta$, derart, daß für fast alle ν und $\beta = 1, \ldots, b$ gilt: $\tau_\nu(W_\beta)$ ist eine in V enthaltene offene Umgebung von y, und die durch Beschränkung von τ_ν bestimmte Abbildung $W_\beta \to \tau_\nu(W_\beta)$ ist biholomorph.

Es genügt, hier den Fall $\beta = 1$ zu betrachten. Sei zunächst $'W_1$ eine Umgebung von x_1, die relativ-kompakt in U_1 liegt. Da $\tau(\overline{'W_1}) \subset V$, so gibt es ein ν_0, so daß $\tau_\nu(\overline{'W_1}) \subset V$ für alle $\nu \geqq \nu_0$. Ist V hinreichend klein gewählt, so kann man in U_1 bzw. V komplexe Koordinaten $u_1, \ldots, u_d$ bzw. $v_1, \ldots, v_d$, $d := d(X)$, mit $x_1 = (0, \ldots, 0)$, $y = (0, \ldots, 0)$ so einführen, daß $\tau | U_1$ durch die Gleichungen

$$v_1 = u_1, \ldots, v_d = u_d$$

beschrieben wird. Dann lassen sich für $\nu \geqq \nu_0$ wegen $\tau_\nu('W_1) \subset V$ die Abbildungen $\tau_\nu | 'W_1$ durch Gleichungen

$$v_1 = u_1 + a_1^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_d), \ldots, v_d = u_d + a_d^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_d),$$

mit in $'W_1$ holomorphen Funktionen $a_\delta^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_d)$, $\delta = 1, \ldots, d$, $\nu \geqq \nu_0$, beschreiben. Jede Folge $\{a_\delta^{(\nu_\nu)}, a_\delta^{(\nu_\nu+1)}, \ldots\}$, $\delta = 1, \ldots, d$, konvergiert in $'W_1$ gleichmäßig gegen Null. Das folgende Lemma liefert nun eine gesuchte Umgebung W_1.

Lemma [13]. *In einer Umgebung A des Nullpunktes $0 \in C^d(z_1, \ldots, z_d)$ seien d Folgen holomorpher Funktionen $\{f_\delta^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d),\ \nu \geqq 1\}$ gegeben, derart, daß $\{f_\delta^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d),\ \nu \geqq 1\}$ in A gleichmäßig gegen z_δ konvergiert, $\delta = 1, \ldots, d$. Dann gibt es eine offene Umgebung $B < A$ von 0 und ein ν_0, so daß jedes Funktionensystem*

$$w_1 = f_1^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d), \ldots, w_d = f_d^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d), \qquad \nu \geqq \nu_0,$$

eine biholomorphe Abbildung φ_ν von B auf eine offene Menge $\varphi_\nu(B) < C^d(w_1, \ldots, w_d)$ mit $(0, \ldots, 0) \in \varphi_\nu(B)$ definiert.

Wir müssen noch zeigen, daß bei kompaktem X für fast alle ν gilt $\mathfrak{g}(\tau_\nu) = b$. Wäre etwa $\mathfrak{g}(\tau_\nu) > b$ für eine unendliche Folge ν_j, so könnte man eine Punktfolge $x_{\nu_j} \in X - \bigcup_{\beta=1}^{b} W_\beta$ finden, so daß $\tau_{\nu_j}(x_{\nu_j})$ gegen y konvergiert. Ist dann $\tilde{x}$ ein Häufungspunkt der Folge $\{x_{\nu_j}\}$, so müßte gelten: $y = \tau(\tilde{x})$ und also $\tilde{x} = x_{\beta_0}$ für ein gewisses $\beta_0 \in \{1, \ldots, b\}$. Das aber ist wegen $\tilde{x} \in X - \bigcup_{\beta=1}^{b} W_\beta$ unmöglich. — Satz 10 ist damit bewiesen.

Anmerkung. Ist X nicht kompakt, so gilt im allgemeinen $\mathfrak{g}(\tau_\nu) > \mathfrak{g}(\tau)$ für fast alle ν. $\mathfrak{g}(\tau_\nu)$ kann sogar unbeschränkt sein, wie das Beispiel der durch die Polynome $z + 2^{-\nu^3} z^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ definierten Überlagerungsabbildungen $\tau_\nu : C^1 \to C^1$ zeigt. Die τ_ν konvergieren kompakt gegen die Identität $i : C^1 \to C^1$ und es gilt: $\mathfrak{g}(\tau_\nu) = \nu$.

Unmittelbar aus Satz 10 folgt, wenn man die Gleichung $\mathfrak{g}(\tau^{(\nu)}) = \mathfrak{g}(\tau)^\nu$ beachtet:

Ist X kompakt und $\tau : X \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, derart, daß die Iterierten $\tau^{(\nu)}$ kompakt gegen eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tilde{\tau} : X \to X$ konvergieren, so sind τ und $\tilde{\tau}$ biholomorph.

§ 5. Folgerungen aus Randeigenschaften eigentlicher holomorpher Abbildungen

5.1. In diesem Paragraphen sollen einige Aussagen bewiesen werden, die mit dem Randverhalten eigentlicher holomorpher Abbildungen $\tau : X \to Y$ zusammenhängen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall, daß X ein Gebiet des C^2 ist, da hierbei schon manche der für den Allgemeinfall typischen Sachverhalte auftreten. — Die Betrachtungen dieses und des nächsten Paragraphen schließen an Untersuchungen von W. Rothstein über biholomorphe Abbildungen [32] an. Vgl. auch H. Behnke und E. Peschl [2] sowie K. H. Hedtfeld [17].

[13]) Wir verzichten darauf, den einfachen Beweis hier auszuführen. Vgl. auch [3], p. 86, Satz 53.

Es ist zweckmäßig, den folgenden Begriff einzuführen.

Definition 4. *Es sei B eine offene Menge eines lokal-kompakten Raumes R und $\tau: B \to {}^*R$ eine stetige Abbildung von B in einen topologischen Raum ${}^*R$. τ heißt eigentlich in einem Randpunkt $b_0 \in R$ von B, wenn gilt: Ist ${}^*K$ irgendeine kompakte Menge in ${}^*R$, so gibt es eine Umgebung $U(b_0) \subset R$, derart, daß $\tau^{-1}({}^*K) \cap U(b_0)$ leer ist.*

Bemerkung. Liegt B relativ-kompakt in R, so ist τ eigentlich schlechthin genau dann, wenn τ in allen Randpunkten von B eigentlich ist.

Wir beweisen nun

Satz 11. *Sei X ein Gebiet des C^2. Es gebe einen Randpunkt $x_0 \in C^2$ von X und eine biholomorphe Abbildung φ einer Umgebung $U(x_0) \subset C^2$ auf den Dizylinder*

$$D := \{(w,z): |w| < 1, |z| < 1\} \quad \text{des} \quad C^2(w,z)$$

mit

$$\varphi(\partial X \cap U) = \{(w,z): (w,z) \in D, \ \operatorname{Re} z = 0\},$$

$$\varphi(X \cap U) = \{(w,z): (w,z) \in D, \ \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Ist dann $\tau: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von X in ein beschränktes Gebiet Y eines $C^m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, so liegt in ∂Y eine eindimensionale lokal-analytische Menge des C^m [14]).

Die Voraussetzung über X besagt in anderen Worten, daß es auf dem Rande von X ein durch den Punkt x_0 hindurchgehendes „analytisches Hyperflächenstück" der topologischen Dimension 3 gibt.

Beweis. Bezeichnet $\check{\varphi}$ die Beschränkung der Abbildung φ^{-1} auf das Gebiet $'D := \{(w,z): (w,z) \in D, \ \operatorname{Re} z > 0\}$, so ist $\tau \circ \check{\varphi}: {}'D \to Y$ eine holomorphe Abbildung, die durch Gleichungen

$$\eta_\mu = g_\mu(w,z), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

gegeben werde. Sei $z^{(\nu)} \in \{z: |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ irgendeine Punktfolge, die gegen einen Punkt z^* mit $|z^*| < 1$ und $\operatorname{Re} z^* = 0$ konvergiert; dann werden die m Funktionenfolgen

$$h_\mu^{(\nu)}(w) := g_\mu(w, z^{(\nu)}) \qquad (\mu = 1, \ldots, m; \ \nu = 1, 2, \ldots)$$

betrachtet. Alle Funktionen $h_\mu^{(\nu)}$ sind holomorph und beschränkt im Einheitskreis $\{w: |w| < 1\}$. Daher lassen sich nach MONTEL Teilfolgen $h_\mu^{(\nu_\mu)}(w)$ finden, die im Einheitskreis kompakt gegen holomorphe Funktionen $h_\mu(w)$, $\mu = 1, \ldots, m$, konvergieren. Wir behaupten, daß man so, wenn man von beliebigen Folgen $z^{(\nu)}$ der obigen Art ausgeht, nicht immer zu sämtlich konstanten Funktionen h_μ gelangt. Wäre dies doch der Fall, so würden die Ableitungen $\frac{d h_\mu^{(\nu)}}{dw}$ stets kompakt gegen Null konvergieren. Das aber hieße, daß jede der Funktionen $\frac{\partial g_\mu(w,z)}{\partial w}$ in allen auf $\partial' D$ gelegenen Punkten der Menge $\{w: |w| < 1\} \times$

[14]) Vgl. W. ROTHSTEIN [32], § 2, Satz 2 und 3.

$\{z: \mathrm{Re}\, z = 0\}$ die Randwerte Null hätte. Nach einer Verallgemeinerung eines Satzes von RADÓ (vgl. [4], Satz 1 mit Bemerkung p. 14) folgt daraus

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial w} \equiv 0 \quad \text{für alle } \mu,$$

insbesondere also: $r(\tau \circ \check{\varphi}) \leqq 1$. Das aber ist nicht möglich, da τ als eigentliche Abbildung notwendig den Rang 2 hat und $\check{\varphi}$ biholomorph ist.

Wir denken uns nun die Folgen $z^{(\nu)}$ und ν_j so gewählt, daß nicht alle Funktionen h_μ konstant werden. Da $\tau \circ \check{\varphi}$ eigentlich in allen Punkten des Randteiles

$$\{(w, z): (w, z) \in D, \mathrm{Re}\, z = 0\} \subset \partial' D$$

ist, muß die Punktmenge

$$M := \{(\eta_1, \ldots, \eta_m): \eta_\mu = h_\mu(w),\ |w| < 1\}$$

des $C^m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ in ∂Y liegen. M enthält aber eine lokal-analytische Menge der Dimension 1 [15]), q.e.d.

Folgerung. Ein Gebiet $X \subset C^2$ mit den in Satz 14 betrachteten Eigenschaften läßt sich niemals holomorph und eigentlich in eine Hyperkugel H^m eines C^m, $m \geqq 1$ abbilden. — Denn in ∂H^m gibt es bekanntlich keine lokal-analytischen Mengen des C^m, deren Dimension größer als Null ist.

Insbesondere gestattet ein beschränktes Zylindergebiet des C^2 keine eigentliche holomorphe Abbildung τ in eine Hyperkugel H^m (für $m = 2$ und $\mathfrak{g}(\tau) = 1$ ist dies eine bekannte Aussage von H. POINCARÉ). Es bleibt offen, ob eine Hyperkugel im C^2 holomorph und eigentlich auf einen Dizylinder im C^2 abbildbar ist.

5.2. Mit Hilfe einer ähnlichen Schlußweise wie im Beweise zu Satz 11 gewinnen wir weiter

Satz 12. Es sei $X = X_w \times X_z$ ein Zylindergebiet des $C^2(w, z)$; sei $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von X in ein beschränktes Zylindergebiet $Y = Y_{\eta_1} \times \cdots \times Y_{\eta_m}$ im $C^m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, die durch Gleichungen

$$\eta_\mu = g_\mu(w, z), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

beschrieben werden möge. Es existiere ein Kontinuum $\mathfrak{C} \subset \partial X_z$, so daß τ in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ eigentlich ist. Dann gilt

$$\frac{\partial g_\mu(w, z)}{\partial w} \equiv 0$$

für wenigstens ein μ, $1 \leqq \mu \leqq m$.

Beweis. Wie im Beweise von Satz 11 sei $z^* \in \mathfrak{C}$ ein beliebiger Punkt und $z^{(\nu)} \in X_z$ irgendeine gegen z^* konvergierende Punktfolge. Jede der m Funktionenfolgen $h_\mu^{(\nu)}(w) := g_\mu(w, z^{(\nu)})$, $\mu = 1, \ldots, m$, besitzt dann eine Teilfolge $h_\mu^{(\nu_j)}(w)$,

[15]) M braucht nicht selbst schon eine lokal-analytische Menge des C^m zu sein.

die in X_w kompakt gegen je eine holomorphe Funktion $h_\mu(w)$ konvergiert. Durch die Gleichungen

$$\eta_\mu = h_\mu(w), \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

wird eine holomorphe Abbildung $\tau_0: X_w \to C^m$ mit $\tau_0(X_w) \subset \overline{Y}$ definiert. Da τ nach Voraussetzung insbesondere in allen Punkten von $X_w \times \{z^*\} \subset \partial X$ eigentlich ist, gilt sogar $\tau_0(X_w) \subset \partial Y$. Dann muß aber wenigstens eine der Funktionen $h_\mu(w)$ konstant sein, denn für wenigstens ein μ muß $h_\mu(X_w) \subset \partial Y_{\eta_\mu}$ gelten. Ist etwa $h_{\mu_0}(w) \equiv \text{const}$, so folgt, daß die Funktionenfolge $\frac{dg_{\mu_0}(w, z^{(\nu)})}{dw}$ in X_w kompakt gegen Null konvergiert, da für $\mu = 1, \ldots, m$ die Folge der Ableitungen $\frac{dg_\mu(w, z^{(\nu)})}{dw}$ in X_w jeweils kompakt gegen $\frac{dh_\mu(w)}{dw}$ strebt. Es ergibt sich weiter, daß die Folge der Produkte $p^{(\nu)}(w) := \prod_{\mu=1}^{m} \frac{dg_\mu(w, z^{(\nu)})}{dw}$ in X_w kompakt gegen Null konvergiert. Gleiches kann nun auch für die Folge der Produkte $p^{(\nu)}(w) := \prod_{\mu=1}^{m} \frac{dg_\mu(w, z^{(\nu)})}{dw}$, wo die ursprüngliche Gesamtfolge $z^{(\nu)}$ zugrundegelegt ist, behauptet werden. Denn die soeben angewandte Schlußweise zeigt, daß jede Teilfolge der $p^{(\nu)}(w)$ eine weitere Teilfolge besitzt, die in X_w kompakt gegen Null konvergiert.

Da z^* beliebig auf $\mathfrak{C}$ gewählt wurde, muß die Funktion

$$\Psi(w, z) := \prod_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\mu(w, z)}{\partial w}$$

so beschaffen sein, daß sie in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ die Randwerte Null hat. Nach der schon oben benutzten Verallgemeinerung eines Satzes von RADÓ gilt daher $\Psi(w, z) \equiv 0$, also auch $\frac{\partial g_\mu}{\partial w} \equiv 0$ für wenigstens ein μ, q.e.d.

Eine einfache Folgerung aus Satz 12 ist

Satz 13. Es seien $X = X_w \times X_z \subset C^2(w, z)$ und $X' = X_{w'} \times X_{z'} \subset C^2(w', z')$ beschränkte Zylindergebiete. Dann ist jede eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to X'$ ein kartesisches Produkt $\tau = \varphi \times \psi$ von eigentlichen holomorphen Abbildungen

$$\varphi: X_w \to X_{w'}, \quad \psi: X_z \to X_{z'}$$

oder

$$\varphi: X_w \to X_{z'}, \quad \psi: X_z \to X_{w'}.$$

In der Tat, ist τ gegeben durch $(w, z) \to (w', z') = \big(f_1(w, z), f_2(w, z)\big)$, so hängt nach Satz 12 wenigstens eines der f_ν, $\nu = 1, 2$, nicht von w und wenigstens eines der f_ν nicht von z ab. Da die Funktionaldeterminante der f_ν nicht identisch verschwinden kann, muß also entweder gelten

$$f_1(w, z) \equiv \varphi(w), \quad f_2(w, z) \equiv \psi(z) \quad \text{oder} \quad f_1(w, z) \equiv \psi(z), \quad f_2(w, z) \equiv \varphi(w).$$

Daß φ und ψ eigentliche Abbildungen der Komponentengebiete von X in die Komponentengebiete von X' darstellen, ist klar.

Eine unmittelbare Übertragung von Satz 13 auf eigentliche holomorphe Abbildungen von direkten Produkten beschränkter Gebiete in Zahlenräumen höherer Dimension ist nicht möglich, wie einfache Beispiele zeigen. Es werden besondere Voraussetzungen über Randeigenschaften der Gebiete hinzutreten müssen. Wir gehen darauf nicht näher ein[16]).

§ 6. Überlagerungsabbildungen von Polyedergebieten

6.1. Wir betrachten in diesem Paragraphen Überlagerungsabbildungen von speziellen komplexen Räumen, den Polyedergebieten in Zahlenräumen, auf Räume der gleichen Art. Es wird sich zeigen, daß solche Abbildungen nur unter besonderen Voraussetzungen möglich sind.

Zunächst seien Bezeichnungen eingeführt.

a) Unter einem *analytischen Polyeder* P in einem komplexen Raum X wird eine kompakte Punktmenge von X mit folgender Eigenschaft verstanden: Es gibt eine offene Umgebung U von P und endlich viele in U holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$, so daß ein Punkt $x_0 \in U$ genau dann zu P gehört, wenn gilt $|f_1(x_0)| \leqq 1, \ldots, |f_k(x_0)| \leqq 1$.

b) Ein *Polyedergebiet* A in einem rein n-dimensionalen komplexen Raum X ist eine zusammenhängende Komponente des offenen Kernes $\mathring{P}$ eines analytischen Polyeders P in X mit der folgenden Eigenschaft: Die Umgebung U von P und die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ [vgl. a)] können so gewählt werden, daß für jedes $\varkappa = 1, \ldots, k$ die Menge $\{x : x \in U, |f_\varkappa(x)| = 1\} \cap \partial A$ die topologische Dimension $2n-1$ hat. — Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ mit dieser Eigenschaft heißen ein zu A gehörendes Funktionensystem.

Es ist klar, daß jedes Polyedergebiet in einem holomorph-vollständigen komplexen Raum X wieder ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, also insbesondere ein Holomorphiegebiet in X ist.

c) Sei A ein Polyedergebiet in X und $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ein zu A gehörendes Funktionensystem. Die Niveaumengen jeder Abbildung $f_\varkappa : A \to C^1$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ bilden die Elemente je einer einfachen Zerlegung $Z_\varkappa = Z(f_\varkappa)$[17]) von A, die eine *charakteristische Zerlegung* von A heiße.

Zwei charakteristische Zerlegungen $Z_{\varkappa_0}$, $Z_{\varkappa_1}$ von A sind genau dann voneinander verschieden, wenn die zugehörigen Funktionen $f_{\varkappa_0}$, $f_{\varkappa_1}$ analytisch

---

[16]) Vgl. hierzu H. CARTAN [11]. Dort wird bewiesen, daß ein Holomorphismus eines direkten Produktes beschränkter Gebiete sich dann als kartesisches Produkt von Abbildungen der Komponentengebiete darstellen läßt, wenn der Holomorphismus in genügender Nähe der Identität liegt; Voraussetzungen über Randeigenschaften werden hierbei nicht benötigt.

[17]) Eine Zerlegung eines topologischen Raumes R heißt einfach, wenn die Elemente der Zerlegung zusammenhängende Mengen in R sind. — Vgl. auch [36].

unabhängig sind. Die Anzahl der charakteristischen Zerlegungen von A heiße die *Stufe* s von A; es gilt $s \leqq k$. Es läßt sich elementar zeigen, daß das System der verschiedenen charakteristischen Zerlegungen von A — insbesondere also die Stufe s — nur von A, nicht aber von der speziellen Wahl eines zu A gehörenden Funktionensystems $\{f_1, \ldots, f_k\}$ abhängt.

Beispiel. Jedes endliche konvexe euklidische Polyeder Q (d. h. jede konvexe Zelle) des $R^{2n}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ist ein analytisches Polyeder im $C^n(z_1, \ldots, z_n)$, $z_\nu = x_\nu + i y_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Q kann durch Ungleichungen

$$|e^{a_{\varkappa 1} z_1 + \cdots + a_{\varkappa n} z_n + b_\varkappa}| \leqq 1, \quad \varkappa = 1, \ldots, k \qquad (k \geqq 2n+1),$$

gegeben werden. Der offene Kern $\overset{\circ}{Q}$ von Q ist ein Polyedergebiet; $\overset{\circ}{Q}$ heiße ein *euklidisches Polyedergebiet*. Die charakteristischen Zerlegungen von $\overset{\circ}{Q}$ sind sämtlich „affin" (s. unten p. 186), die Stufe s von $\overset{\circ}{Q}$ ist, wie eine elementare Betrachtung ergibt, nicht kleiner als n. Ist Q insbesondere ein Simplex des $R^{2n}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, so heiße $\overset{\circ}{Q}$ ein *Simplexgebiet* des $C^n(z_1, \ldots, z_n)$; für die Stufe s von $\overset{\circ}{Q}$ gilt dann $n+1 \leqq s \leqq 2n+1$, und einfache Beispiele lehren, daß s in diesem Fall jeden der Werte $n+1, \ldots, 2n+1$ annehmen kann.

6.2. Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber bevorzugt Polyedergebiete im C^2. Wir beweisen

Satz 14. *Gegeben seien ein Polyedergebiet A der Stufe s im $C^2(w, z)$ sowie ein Polyedergebiet ${}^*A$ der Stufe ${}^*s$ im $C^2({}^*w, {}^*z)$; $\tau: A \to {}^*A$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung (also eine Überlagerungsabbildung). Dann ist jeder charakteristischen Zerlegung Z_σ von A in natürlicher Weise eine charakteristische Zerlegung ${}^*Z_{*\sigma}$ von ${}^*A$ zugeordnet, derart, daß jedes Element von Z_σ vermöge τ auf ein Element von ${}^*Z_{*\sigma}$ abgebildet wird; verschiedenen Z_σ sind verschiedene ${}^*Z_{*\sigma}$ zugeordnet*[18]).

Bemerkung. Die Voraussetzung der Eigentlichkeit von τ ist wesentlich: Unter beliebigen holomorphen Abbildungen gehen Zerlegungen des Urbildraumes nicht in Zerlegungen des Bildraumes über (wohl aber entspricht umgekehrt jeder Zerlegung des Bildraumes eine Zerlegung des Urbildraumes).

Korollar zu Satz 14. *Für die Stufen s von A und ${}^*s$ von ${}^*A$ gilt $s \leqq {}^*s$.*

Zum Beweise von Satz 14 benutzen wir den

Hilfssatz 2. *Sei $X = X_w \times X_z$ ein Zylindergebiet des $C^2(w, z)$ und $\varphi: X \to {}^*A$ eine holomorphe Abbildung von X in ein Polyedergebiet ${}^*A$ des $C^2({}^*w, {}^*z)$; es existiere ein Kontinuum $\mathfrak{C} \subset \partial X_z$, so daß φ in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ eigentlich ist. Ist dann $\{{}^*f_1, \ldots, {}^*f_m\}$ ein zu ${}^*A$ gehöriges Funktionensystem, so hängt wenigstens eine der Funktionen ${}^*f_\mu \circ \varphi$, $\mu = 1, \ldots, m$, von der Variablen w nicht ab.*

Beweis. Durch die Gleichungen

$$\eta_\mu = {}^*f_\mu({}^*w, {}^*z), \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

[18]) Für den Fall, daß τ biholomorph ist, vgl. W. ROTHSTEIN [32], § 4, dort insbesondere Satz 6 und 7.

wird eine holomorphe Abbildung $\tau: {}^*A \to E$ in den Polyzylinder

$$E := E_1 \times \cdots \times E_m, \qquad E_\mu := \{\eta_\mu : |\eta_\mu| < 1\}, \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

gegeben. Diese Abbildung ist offenbar eigentlich. Mithin ist die holomorphe Abbildung $\tau \circ \varphi: X \to E$ in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ eigentlich; Anwendung von Satz 12 liefert dann die Behauptung.

Zum Beweise von Satz 14 sei nun $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ein zu A und $\{{}^*f_1, \ldots, {}^*f_m\}$ ein zu ${}^*A$ gehörendes Funktionensystem. Z_{σ_0} sei eine der charakteristischen Zerlegungen von A, die Elemente von Z_{σ_0} sind die Niveaumengen der holomorphen Abbildung $f_{\sigma_0}: A \to C^1$. Wir betrachten die Menge $H_{\sigma_0} := \{(w, z) : (w, z) \in \partial A, |f_{\sigma_0}(w, z)| = 1\} \subset C^2$, sie hat die topologische Dimension 3 [vgl. b), p. 183]. Auf H_{σ_0} läßt sich ein Punkt (w_0, z_0) wählen, derart, daß dort wenigstens eine der partiellen Ableitungen von f_{σ_0} von Null verschieden ist; sei etwa $\frac{\partial f_{\sigma_0}(w_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$. Es gibt dann eine Umgebung U von (w_0, z_0), so daß durch die Zuordnung

$$w \to w' = w$$
$$z \to z' = f_{\sigma_0}(w, z)$$

eine biholomorphe Abbildung ϱ von U auf ein Zylindergebiet $X_{w'} \times D_{z'}$, definiert wird. In $D_{z'}$ ist sicher ein Bogen der Kreislinie $\{z' : |z'| = 1\}$ enthalten; es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $X_{z'} := D_{z'} \cap \{z' : |z'| < 1\}$ ein Gebiet ist. Dann ist $N := \varrho^{-1}(X_{w'} \times X_{z'})$ eine in A enthaltene „einseitige Umgebung" von (w_0, z_0). Wir bezeichnen $X_{w'} \times X_{z'}$ mit X'; es sei ferner $\check{\varrho}: X' \to N$ die durch Beschränkung von ϱ^{-1} bestimmte Abbildung. Auf die Abbildung $\tau \circ \check{\varrho}: X' \to {}^*A$ ist nunmehr Hilfssatz 2 anwendbar: Wenigstens eine der Funktionen ${}^*f_\mu \circ (\tau \cdot \check{\varrho})$, etwa ${}^*f_{\mu_0} \circ (\tau \circ \check{\varrho})$, hängt also nur von der Variablen z' ab. Dies bedeutet, daß ${}^*f_{\mu_0} \circ \tau$ von f_{σ_0} in N analytisch abhängt, und hieraus folgt, daß diese Funktionen im gesamten Polyedergebiet A voneinander analytisch abhängen.

Wir behaupten nun, daß jedes Element der Zerlegung Z_{σ_0} vermöge τ auf ein Element der Zerlegung ${}^*Z_{\mu_0}$ abgebildet wird. — Wegen der soeben nachgewiesenen Abhängigkeit von ${}^*f_{\mu_0} \circ \tau$ und f_{σ_0} wird sicher jedes Element M von Z_{σ_0} in ein Element ${}^*M$ von ${}^*Z_{\mu_0}$ abgebildet. Da $\tau: A \to {}^*A$ eigentlich ist, ist $\tau(M)$ eine analytische Menge in ${}^*A$. Da τ nirgends entartet von Range 2 abbildet, ist $\tau(M)$ rein 1-dimensional und setzt sich somit aus gewissen der irreduziblen Komponenten von ${}^*M$ zusammen. Es muß dann aber sogar $\tau(M) = {}^*M$ gelten; dies ergibt sich auf einfache Art daraus, daß τ als nirgends entartete Abbildung insbesondere offen ist.

Jeder Zerlegung Z_σ ist demnach vermöge τ in natürlicher Weise eine Zerlegung ${}^*Z_{*\sigma}$ zugeordnet. Verschiedenen Z_{σ_1}, Z_{σ_2} müssen so notwendig verschiedene ${}^*Z_{*\sigma_1}$, ${}^*Z_{*\sigma_2}$ zugeordnet sein. Denn sind die Elemente von Z_{σ_i} bzw. ${}^*Z_{*\sigma_i}$, $i = 1, 2$, die Niveaumengen der Funktionen f_{σ_i} bzw. ${}^*f_{*\sigma_i}$, so hängen, wie bewiesen, die Funktionen f_{σ_i} und ${}^*f_{*\sigma_i} \circ \tau$ analytisch voneinander ab, andererseits sind f_{σ_1} und f_{σ_2} analytisch unabhängig. Hieraus ergibt sich, daß

auch ${}^*f_{*\sigma_1}$ und ${}^*f_{*\sigma_2}$ analytisch unabhängig und folglich ${}^*Z_{*\sigma_1}$ und ${}^*Z_{*\sigma_2}$ verschieden sind.

Damit ist der Satz bewiesen.

6.3. Durch Satz 14 wird die Möglichkeit, ein Polyedergebiet auf ein anderes eigentlich holomorph abzubilden, stark eingeschränkt. Als Beispiel sollen Überlagerungsabbildungen von euklidischen Polyedergebieten betrachtet werden. Hierbei benutzen wir die folgende Terminologie:

Eine einfache Zerlegung Z eines Gebietes $X \subset C^n$ heißt *affin*, wenn gilt:

a) Jedes Element E von Z ist ein $(n-1)$-dimensionales analytisches Ebenenstück, d.h. E ist eine zusammenhängende Komponente des Durchschnitts einer $(n-1)$-dimensionalen analytischen Ebene H des C^n mit X.

b) Zwei Elemente E, E' von Z sind parallel, d.h. sie sind in parallelen analytischen Ebenen H, H' enthalten.

Eine affine Zerlegung von X ist eindeutig bestimmt durch eine $(n-1)$-dimensionale „Richtung" des C^n. Wir nennen k affine Zerlegungen von X *unabhängig*, wenn die zugehörigen Richtungen unabhängig sind.

Nun gilt:

Satz 15. Gegeben sei je ein Gebiet $X \subset C^n(z_1, \ldots, z_n)$ bzw. ${}^*X \subset C^n({}^*z_1, \ldots, {}^*z_n)$, $n \geqq 2$. Es seien $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$ affine Zerlegungen von X und ${}^*Z_1, \ldots, {}^*Z_{n+1}$ affine Zerlegungen von ${}^*X$; je n der Z_μ bzw. je n der ${}^*Z_\mu$ seien unabhängig. Sei weiter $\tau: X \to {}^*X$ eine surjektive holomorphe Abbildung, die jeweils Z_μ in ${}^*Z_\mu$, $\mu = 1, \ldots, n+1$, überführt, d.h. die jedes Element von Z_μ auf ein Element von ${}^*Z_\mu$ abbildet. Dann ist τ die Beschränkung einer affinen Abbildung

$$\alpha: C^n(z_1, \ldots, z_n) \to C^n({}^*z_1, \ldots, {}^*z_n).$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen — eventuell ist eine lineare Koordinatentransformation auszuführen — daß die Richtungen, durch welche $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$ bzw. ${}^*Z_1, \ldots, {}^*Z_{n+1}$ festgelegt sind, der Reihe nach gegeben werden durch

$$z_1 = \text{const}, \ldots, z_n = \text{const}, \qquad z_1 + \cdots + z_n = \text{const}$$

bzw.

$${}^*z_1 = \text{const}, \ldots, {}^*z_n = \text{const}, \qquad {}^*z_1 + \cdots + {}^*z_n = \text{const}.$$

Die Abbildung $\tau: X \to {}^*X$ werde beschrieben durch Gleichungen

$${}^*z_1 = f_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, {}^*z_n = f_n(z_1, \ldots, z_n).$$

Wegen $\tau(Z_\nu) = {}^*Z_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, folgt, daß jeweils die Funktion $f_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ von der Funktion $\varphi_\nu(z_1, \ldots, z_n) := z_\nu$ analytisch abhängig ist. Also hängt $f_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ nur von der Variablen z_ν wirklich ab, und wir können schreiben $f_\nu(z_1, \ldots, z_n) = f_\nu(z_\nu)$. Da auch $\tau(Z_{n+1}) = {}^*Z_{n+1}$ gilt, müssen weiter die Funktionen

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) := \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z_\nu), \qquad \varphi(z_1, \ldots, z_n) := \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu$$

voneinander analytisch abhängig sein. Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{df_1(z_1)}{dz_1} \equiv \frac{df_2(z_2)}{dz_2} \equiv \cdots \equiv \frac{df_n(z_n)}{dz_n},$$

also wegen $n \geqq 2$

$$\frac{df_\nu(z_\nu)}{dz_\nu} \equiv c = \text{const}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Demnach ist

$$f_\nu(z_\nu) \equiv c z_\nu + a_\nu,$$

worin notwendig $c \neq 0$ ist, und es folgt die Behauptung.

Bemerkung. Die Aussage von Satz 15 bleibt auch unter schwächeren Bedingungen richtig: Es genügt offenbar, die durch τ vermittelte Beziehung zwischen den Zerlegungen Z_ν und ${}^*Z_\nu$ nur in einer Umgebung eines Punktes von X bzw. seines Bildpunktes in ${}^*X$ vorauszusetzen.

Im folgenden seien A und ${}^*A$ euklidische Polyedergebiete im $C^2(w, z)$ bzw. $C^2({}^*w, {}^*z)$, deren Stufen s und ${}^*s$ nicht kleiner als 3 sind. (Es ist leicht zu zeigen, daß ein euklidisches Polyedergebiet im C^2 genau dann von der Stufe 2 ist, wenn es direktes Produkt eindimensionaler euklidischer Polyedergebiete oder affines Bild eines solchen direkten Produktes ist.) Als Anwendung der Sätze 14 und 15 folgt dann unmittelbar

Satz 16. *Jede holomorphe Überlagerungsabbildung* $\tau: A \to {}^*A$ *ist die Beschränkung einer affinen Abbildung* $\alpha: C^2(w, z) \to C^2({}^*w, {}^*z)$.

Hieraus ergeben sich insbesondere die folgenden Aussagen:

(a) *Jede holomorphe Überlagerungsabbildung* $\tau: A \to {}^*A$ *is biholomorph.*

(b) *Die Anzahl der holomorphen Überlagerungsabbildungen von* A *auf* ${}^*A$ *ist endlich.*

Denn eine affine Abbildung des Raumes zweier komplexen Veränderlichen ist festgelegt durch Zuordnung zweier Systeme von je drei komplex linear-unabhängigen Punkten; unter den Eckpunkten eines endlichen euklidischen Polyeders sind aber stets drei linear-unabhängige vorhanden. Es gibt also höchstens so viele Überlagerungsabbildungen $\tau: A \to {}^*A$, wie es Möglichkeiten gibt, drei festgewählten komplex linear-unabhängigen Eckpunkten von A drei komplex linear-unabhängige Eckpunkte von ${}^*A$ zuzuordnen. Da jedoch nicht jede derartige Zuordnung notwendig zu einer gesuchten Abbildung von A auf ${}^*A$ führt, ist die Zahl dieser Abbildungen geringer [19]). Insbesondere kommt es vor, daß überhaupt keine Überlagerungsabbildung $\tau: A \to {}^*A$ existiert. Zum Beispiel tritt dies ein, wenn die Eckenanzahlen oder auch die Stufen von A und ${}^*A$ verschieden sind; aber auch im Falle gleicher Eckenanzahlen und Stufen braucht es keine Abbildungen τ zu geben, wie geeignet gewählte Beispiele von Simplexgebieten der Stufe 3 zeigen (vgl. auch unten die Betrachtungen in 6.4.).

[19]) Sind z. B. A und ${}^*A$ Simplexgebiete, so läßt sich elementar einsehen, daß es *höchstens fünf* verschiedene affine Abbildungen von A auf ${}^*A$ gibt und daß diese Anzahl in besonderen Fällen auch wirklich erreicht wird.

Die Aussagen (a) und (b) sind speziell für den Fall $A = {}^*A$ gültig. Jede Überlagerungsabbildung eines euklidischen Polyedergebietes $A \subset C^2$ der Stufe $s \geqq 3$ auf sich ist also affin und infolgedessen ein Holomorphismus. Die Gruppe $\mathfrak{A}(A)$ dieser Holomorphismen ist demnach stets eine endliche Gruppe. Es ist wieder einleuchtend, daß $\mathfrak{A}(A)$ „im allgemeinen", d.h. wenn A keine besonderen Symmetrien aufweist, nur aus der Identität besteht.

6.4. Wir wollen noch den Fall eines Simplexgebietes $A \subset C^2(w, z)$ der Stufe $s = 3$ etwas näher betrachten. Die Voraussetzung $s = 3$ ist offenbar mit der folgenden Bedingung äquivalent: Es gibt in der komplex-affinen (w, z)-Ebene zwei sich schneidende komplexe Geraden g und g' derart, daß eine der Ecken von A mit dem Schnittpunkt p_0 von g und g' zusammenfällt, während zwei der anderen Ecken auf g und die zwei restlichen Ecken auf g' liegen. Wir können uns daher die Ecken q_ν, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, so numeriert denken, daß $q_0 = p_0$ ist und q_1, q_2 auf g sowie q_3, q_4 auf g' liegen. Nötigenfalls durch Wahl neuer affiner Koordinaten läßt sich erreichen, daß gilt: $q_0 = (0, 0)$, $q_1 = (1, 0)$, $q_2 = (a, 0)$, $q_3 = (0, 1)$, $q_4 = (0, b)$. Dabei sind a und b nicht reell, denn sonst wären 3 der Punkte q_ν reell linear abhängig. Man rechnet nun nach, daß A höchstens *einen* von der Identität verschiedenen affinen Holomorphismus zuläßt (der dann eine Vertauschung von g und g' bewirken muß), und daß ein solcher Holomorphismus genau dann existiert, wenn $a = b$ oder $a = b^{-1}$ ist.

Insbesondere folgt, daß das Simplexgebiet A mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(i, 0)$, $(0, 2i)$ starr gegenüber eigentlichen holomorphen Abbildungen in sich ist.

Literatur

[1] AHLFORS, L.: Open Riemann Surfaces and Extremal Problems on Compact Subregions. Comm. Math. Helv. **24**, 100–134. — [2] BEHNKE, H., u. E. PESCHL: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Starre Regularitätsbereiche. Monatsh. Math. u. Phys. **43**, 493–502 (1936). — [3] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebn. d. Math. **3**, 3 (1934). — [4] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1–16 (1951). — [5] BLANCHARD, A.: Sur les variétés analytiques complexes. Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup **73**, 157–202 (1956). — [6] BOCHNER, S., and D. MONTGOMERY: Groups on Analytic Manifolds. Ann. of Math. **48**, 659–669 (1947). — [7] BRILL, A., u. M. NOETHER: Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann. **7**, 269–310 (1874). — [8] CALABI, E., and B. ECKMANN: A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. Ann. of Math. **58**, 494–500 (1953). — [9] CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. 2. Basel 1950. — [10] CARTAN, H.: Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieurs d'un domaine borné. Math. Z. **35**, 760–773 (1932). — [11] CARTAN, H.: Sur les fonctions de n variables complexes. Les transformations du produit topologique de deux domaines. Bull. Soc. Math. de France **64**, 1–12 (1936). — [12] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. 1951/52. — [13] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233–259 (1955). — [14] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **129**, 274–296 (1955). — [15] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245–318 (1958). — [16] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Einige Anwendungen der Garbentheorie auf die komplexe Analysis. (In Vorbereitung.) — [17] HEDIFELD, K. H.: Starre einfach zusammenhängende Holomor-

phiegebiete. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, H. 8 (1954). — [18] HOPF, H.: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. J. reine u. angew. Math. **163**, 71—88 (1930). — [19] HOPF, H.: Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. Comm. Math. Helv. **16**, 81—100 (1945). — [20] HUREWICZ, W., and H. WALLMANN: Dimension Theory. Princeton 1948. — [21] IWAHASHI, R.: Domains spread on a complex space. J. Math. Soc. Japan **9**, 452—463 (1957). — [22] KÄHLER, E.: Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen, I. Math. Z. **31**, 258—269 (1930). — [23] KERNER, H.: Funktionentheoretische Eigenschaften komplexer Räume. Diss. Univ. München 1958. — [24] KNESER, H.: Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. Math. Ann. **103**, 347—358 (1930). — [25] OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Lemme fondamental. J. Math. Soc. Japan **3**, 204—214, 259—278 (1951). — [26] PERRON, O.: Algebra I. Berlin 1951. — [27] RHAM, G. DE: Variétés différentiables Act. Sci. Inst. Paris: Herman et Cie. 1955. — [28] REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. **130**, 410—441 (1956). — [29] REMMERT, R.: Sur les espaces analytiques holomorphiquement separables et holomorphiquement convexes. C. R. Acad. Sci. Paris **243**, 118—121 (1956). — [30] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957). — [31] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [32] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raum zweier komplexer Veränderlichen. Diss. Univ. Münster 1935. — [33] SCHEJA, G.: Theorie der verzweigten Gebiete über komplexen Räumen und ihrer Holomorphiehüllen. Diss. Univ. Münster 1958. — [34] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig u. Berlin 1934. — [35] SERRE, J. P.: Géometrie Algébrique et Géometrie Analytique. Ann. Inst. Fourier G, 1—42 (1955/56). — [36] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63—93 (1956). — [37] STEIN, K.: Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen. Math. Ann. **136**, 1—8 (1958). — [38] STEIN, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen. (In Vorbereitung.)

Münster, Mathematisches Institut der Universität
München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. Juli 1959)

CARLESON, L.
Math. Zeitschr. 73, 190–196 (1960)

A representation formula for the Dirichlet integral

By
LENNART CARLESON

1. In his investigations of minimal surfaces, DOUGLAS [3] used the following formula for the Dirichlet integral of a harmonic function $u(z)$ in $|z|<1$:

$$\iint\limits_{|z|<1} |\operatorname{grad} u(z)|^2 \, dx\, dy = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|u(e^{i\vartheta}) - u(e^{i\varphi})|^2}{\sin^2 \frac{\vartheta-\varphi}{2}} \, d\vartheta\, d\varphi .$$

A similar formula was used by BEURLING [1]. By means of these relations, it is possible to estimate how changes of the boundary values influence the Dirichlet integral. Such estimates are essential in problems involving variations within this class of functions.

In this paper, a similar formula will be proved for analytic functions. It can then be used for studies of the distribution of zeros of functions with finite Dirichlet integral, for the construction of such functions with given absolute values on $|z|=1$ and for studies of solutions of extremal problems. We shall, however, not be concerned with these applications here, and the result of the present paper is contained in the following theorem.

THEOREM. *Let $f(z)$ be analytic in $|z|<1$ with a finite Dirichlet integral $D(f)$,*

$$D(f) = \iint\limits_{|z|<1} |f'(z)|^2 \, dx\, dy .$$

$f(z)$ can be factorized,

$$f(z) = a z^m \prod_1^\infty \frac{z_\nu - z}{1 - z\bar{z}_\nu} \frac{\bar{z}_\nu}{|z_\nu|} \cdot \exp\left\{ - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \, ds(\varphi) \right\} \times$$

$$\times \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi}+z}{e^{i\varphi}-z} \log |f(e^{i\varphi})| \, d\varphi \right\}.$$

Here s is singular and non-decreasing. We denote the boundary values $|f(e^{i\varphi})|$ also $e^{u(\varphi)}$. Then

$$D(f) = a^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(m + \sum_1^\infty \frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\vartheta} - z_\nu|^2} \right) |f(e^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta + \right.$$

$$+ \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2 \, ds(\varphi)}{\sin^2 \frac{\vartheta-\varphi}{2}} \, d\vartheta +$$

$$\left. + \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(u(x+t) - u(x) \right) \left(e^{2u(x+t)} - e^{2u(x)} \right) dx \right\}.$$

2. We may obviously assume $a=1$ and $m=0$. We first write

$$f(z)=\frac{z_1-z}{1-z\bar{z}_1}\,g(z),\qquad z_1\neq 0,$$

where $|g(z)|=|f(z)|$ a.e. on $|z|=1$. We first assume that $g'(z)$ is continuous in $|z|\leq 1$ and find by a partial integration[1])

$$D(f)=D(g)+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z_1|^2}{|e^{i\vartheta}-z_1|^2}\,|f(e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta. \tag{1}$$

This formula also holds in the general case. To see this, we note the following inequality, $0<p<\infty$,

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|g(e^{i\vartheta})-h(e^{i\vartheta})|^p\,d\vartheta\right\}^{\frac{2}{p}}\leq \text{Const.}\,D(g-h),\qquad h(0)=g(0), \tag{2}$$

which is an immediate consequence of the Hausdorff-Young inequality since, $1<p<2$,

$$\sum_1^\infty |a_n|^p\leqq\left\{\sum_1^\infty n\,|a_n|^2\right\}^{\frac{p}{2}}\left\{\sum_1^\infty\frac{1}{n^{\frac{2}{2-p}}}\right\}^{\frac{2-p}{2}}.$$

We now choose $g_n(z)$ so that $g_n'(z)$ is continuous in $|z|\leq 1$ and $g_n(0)=g(0)$ and such that

$$D(g-g_n)\to 0.$$

By (2), all terms in (1) tend to the corresponding expressions for the given function f.

By induction, we see that

$$D(f)=D(g_n)+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_1^n\frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\vartheta}-z_\nu|^2}\,|f(e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta, \tag{3}$$

if we define $g_n(z)$ by the equation

$$f(z)=\prod_1^n\frac{z_\nu-z}{1-z\bar{z}_\nu}\,\frac{\bar{z}_\nu}{|z_\nu|}\cdot g_n(z).$$

Let

$$g(z)=\lim_{n\to\infty}g_n(z).$$

Since

$$D(g)\leq\varliminf_{n\to\infty}D(g_n),$$

and since the function under the integral sign in (3) is increasing in n, we find

$$D(f)\geqq D(g)+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_1^\infty\frac{1-|z_\nu|^2}{|e^{i\vartheta}-z_\nu|^2}\,|f(e^{i\vartheta})|^2\,d\vartheta. \tag{4}$$

[1]) The argument in this section was used in [1].

In particular $D(g)$ is finite. — Denote by $f_n(z)$ the function

$$f_n(z) = \prod_1^n \frac{z_\nu - z}{1 - z\bar{z}_\nu} \frac{\bar{z}_\nu}{|z_\nu|}\, g(z).$$

We have, by (3),

$$D(f_n) = D(g) + \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_1^n \frac{1 - |z_\nu|^2}{|e^{i\vartheta} - z_\nu|^2} |g(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta.$$

Since $|g(e^{i\vartheta})| = |f(e^{i\vartheta})|$ a.e. and $\lim_{n=\infty} D(f_n) \geq D(f)$, we obtain the inequality reversed to (4) and it is now enough to prove the theorem for functions $f(z) \neq 0$, $|z| < 1$.

3. We assume from now on $f(z) \neq 0$. First, let $f(z)$ be analytic in $|z| \leq 1$. Then

$$D(f) = -\frac{i}{2} \int_{|z|=1} \bar{f}\, df = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{2u(x)}\, dv(x),$$

where

$$v(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{u(x+t) - u(x-t)}{2 \operatorname{tg} t/2}\, dt.$$

Hence, by a partial integration,

$$v'(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{u(x+t) + u(x-t) - 2u(x)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

and so

$$(5) \quad \begin{cases} D(f) = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(2u(x) - u(x+t) - u(x-t)\right) e^{2u(x)}\, dx \\ \qquad = \dfrac{1}{8\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(u(x+t) - u(x)\right) \left(e^{2u(x+t)} - e^{2u(x)}\right) dx. \end{cases}$$

We now apply this formula to the functions

$$f_n(z) = f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) z\right), \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

We first observe that the second formula of (5) contains a non-negative integrand. Thus the right-hand side decreases if we replace $\sin^2 \frac{t}{2}$ by $\sin^2 \frac{t}{2} + \varepsilon^2$, $\varepsilon \neq 0$. We now let $n \to \infty$. On the product space (x, t),

$$\left(2u_n(x) - u_n(x+t) - u_n(x-t)\right) e^{2u_n(x)}\, dx\, dt$$

converges weakly to

$$\left(2u(x) - u(x+t) - u(x-t) e^{2u(x)}\right) dx\, dt + 2\pi \left(ds(x+t) + ds(x-t)\right) e^{2u(x)}\, dx.$$

Furthermore $D(f_n) \to D(f)$ and so

$$(6)\qquad \left| \begin{aligned} D(f) \geqq \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2} + \varepsilon^2} \int_{-\pi}^{\pi} \big(u(x+t) - u(x)\big)\,(e^{2u(x+t)} - e^{2u(x)})\,dx + \\ + \frac{1}{4} \iint_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2\, ds(\varphi)\, d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta - \varphi}{2} + \varepsilon^2}. \end{aligned} \right.$$

Letting $\varepsilon \to 0$, we see that (6) holds for $\varepsilon = 0$.

4. Let $u(z)$ be the harmonic function in $|z| < 1$ constructed by the Poisson formula from the boundary values $u(\vartheta)$. Let $v(z)$ be its conjugate function, $v(0) = 0$, and put

$$g(z) = e^{u+iv}.$$

Denote by $I(u)$ the functional

$$I(u) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \big(u(x+t) - u(x)\big)\,(e^{2u(x+t)} - e^{2u(x)})\,dx.$$

We have proved that $I(u) < \infty$ and shall now prove the inequality

$$(7)\qquad D(g) \leqq I(u).$$

Let $u_M(\vartheta)$ be defined by

$$u_M = \begin{cases} M, & \text{if } u > M \quad (>0) \\ u, & \text{if } |u| \leq M \\ -M, & \text{if } u < -M. \end{cases}$$

From the definition of $I(u)$ we see that

$$I(u_M) \leq I(u).$$

If we denote by $u_M(z)$ and $g_M(z)$ the corresponding harmonic and analytic functions we see that

$$(8)\qquad D(g_M) = \lim_{\varrho \uparrow 1} D\big(g_M(\varrho z)\big) = \lim_{\varrho \uparrow 1} I\big(u_M(\varrho e^{i\vartheta})\big) = I\big(u_M(\vartheta)\big).$$

The last equation follows from the following considerations.

Since $u_M(\vartheta)$ is bounded and $I(u_M) < \infty$ we have

$$(9)\qquad \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^2 \frac{t}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |u_M(\vartheta + t) - u_M(\vartheta)|^2\, d\vartheta < \text{Const.} < \infty.$$

If

$$u_M(r e^{i\vartheta}) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\vartheta},$$

(9) implies by Douglas' formula

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|a_n|^2 < \text{Const.}$$

It follows that (9) holds uniformly, if we replace $u_M(\vartheta)$ by $u_M(re^{i\vartheta})$, $r \leq 1$, and therefore also uniformly for $e^{2u_M(re^{i\vartheta})}$. If

$$e^{2u_M(re^{i\vartheta})} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} A_n(r)\, e^{-in\vartheta}$$

we find, for M fixed,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|A_n(r)|^2 \leqq \text{Const.}, \qquad r \leq 1.$$

We also observe that $A_n(r)$ is continuous for $r \leq 1$. Parseval's relation yields

$$I\left(u_M(re^{i\vartheta})\right) = \pi \sum_{-\infty}^{\infty} |n|\, a_n r^{|n|} A_n(r).$$

Since

$$\Big| \sum_{|n|>N} |n|\, a_n r^{|n|} A_n(r) \Big| \leqq \Big\{ \sum_{|n|>N} |n|\,|a_n|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\{ \sum_{-\infty}^{\infty} |n|\,|A_n(r)|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}},$$

it follows that $I\left(u_M(re^{i\vartheta})\right)$ is continuous for $r \leq 1$. (8) is thus proved.

When $M \to \infty$, $g_M(z)$ tends uniformly to $g(z)$, $|z| \leq r_0 < 1$. Hence

$$D(g) \leq \varliminf_{M\to\infty} D(g_M) = \varliminf_{M\to\infty} I(u_M) \leq I(u)$$

and so (7) is proved.

5. We now consider the singular component of $f(z)$ and shall prove

$$D(f) \leqq D(g) + \frac{1}{4} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2\, ds(\varphi)}{\sin^2 \frac{\vartheta-\varphi}{2}}\, d\vartheta. \tag{10}$$

The proof of (10) will conclude the proof of the theorem.

Let us first assume that s has a jump $m > 0$ at $\varphi = 0$, say, and put

$$g_1(z) = g(z) \exp\left\{ -m \frac{1+z}{1-z} \right\}.$$

Consider for a real

$$h(z;a) = \left(\frac{a-z}{1-za} \right)^{2n}.$$

Since, for $|z| \leq r_0 < 1$,

$$\log|h| = n \log\left(1 - \frac{(1-a^2)(1-|z|^2)}{|1-za|^2}\right) = -n(1-a^2)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\} + O\left(n(1-a^2)^2\right)$$

and $h(0) > 0$, $h(z;a) \to \exp\left\{ m \frac{z+1}{z-1} \right\}$, $a \to 1$, uniformly in $|z| \leq r_0 < 1$, if $n(1-a^2) \to m$. By the result in section 1,

$$D(gh) = D(g) + n(1-a^2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{i\vartheta})|^2\, d\vartheta}{|e^{i\vartheta} - a|^2}.$$

As $a \to 1$, we obtain

$$D(g_1) \leqq \varliminf_{a \to 1} D(g h) \leqq D(g) + m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|g(e^{i\vartheta})|^2}{4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \, d\vartheta$$

which is (10) in this case. — A similar inequality holds for a finite number of jumps and after another limiting process for any purely discontinuous function s.

It is now enough to prove (10) in the case when s is continuous. We now choose stepfunctions $s_n(\varphi)$ with the following properties:

(a) the jumps are located at n-th roots of unity ϑ_j and have the value m_j:

$$m_j = \begin{cases} s(\vartheta_{j+1}) - s(\vartheta_j), & \text{if} \quad \geq 1/n \\ 0 \text{ otherwise.} \end{cases}$$

(b) the maximum jump δ_n tends to zero as $n \to \infty$.

(c) $s_n(\varphi)$ converges weakly to $s(\varphi)$ as $n \to \infty$.

Since s is singular but continuous (a) and (b) are compatible with (c).

Let $s_n(\varphi)$ have jumps m_ν at ϑ_ν and put

$$z_\nu = \varrho_\nu e^{i\vartheta_\nu}, \qquad 1 - \varrho_\nu^2 = m_\nu (\leq \delta_n),$$

and form the Blaschke product corresponding to these points. Then

$$\lim_{n \to \infty} B_n(z)^2 = \exp\left\{ - \int \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d s(\varphi) \right\} \tag{11}$$

uniformly in $|z| \leq r_0 < 1$.

To see this we observe the relation, $|z| \leq r_0 < 1$,

$$\begin{aligned} |B_n(z)|^2 = \prod_1^n \left| \frac{z - z_\nu}{1 - z\bar{z}_\nu} \right|^2 &= \exp\left\{ \sum_1^n \log \left| \frac{z - z_\nu}{1 - z\bar{z}_\nu} \right|^2 \right\} \\ &= \exp\left\{ \sum_1^n \log \left(1 - \frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_\nu|^2)}{|1 - z\bar{z}_\nu|^2} \right) \right\} \\ &= \exp\left\{ - \sum_1^n \left[\frac{(1 - |z|^2)(1 - |z_\nu|^2)}{|1 - z\bar{z}_\nu|^2} \right] + O(\delta_n) \right\} \\ &= \exp\left\{ - \operatorname{Re} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \, d s_n(\varphi) \right] + O(\delta_n) \right\}. \end{aligned}$$

$s_n(\varphi)$ converges weakly to $s(\varphi)$ and it follows that $2 \log |B_n(z)|$ converges uniformly in $|z| \leq r_0$ to the corresponding right-hand side of (11). As both sides of (11) are positive for $z = 0$, (11) follows.

By (6)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2 \, d s(\varphi) \, d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta - \varphi}{2}} < \infty.$$

Hence

$$\iint\limits_{|\vartheta-\varphi|<\varepsilon} \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2 ds(\varphi)\, d\vartheta}{\sin^2 \frac{\vartheta-\varphi}{2}} < \delta(\varepsilon). \tag{12}$$

where $\delta(\varepsilon)\to 0$, $\varepsilon\to 0$. We now consider $g B_n^2$ and find by the result in section 1

$$\begin{aligned} D(g B_n^2) &= D(g) + \int_{-\pi}^{\pi}\int \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2 ds_n(\varphi)\, d\vartheta}{|e^{i\vartheta}-\varrho e^{i\varphi}|^2} \\ &= D(g) + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\int \frac{\varrho^{-1}|f(e^{i\vartheta})|^2 ds_n(\varphi)\, d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta-\varphi}{2} + \frac{(1-\varrho)^2}{4\varrho}}, \end{aligned}$$

where $\varrho(=\varrho_\nu$ if $\varphi=\vartheta_\nu)$ was defined above. By the construction of s_n,

$$\begin{aligned} D(f) &\le D(g) + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\int \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2 ds_n(\varphi)\, d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta-\varphi}{2} + \left(\frac{1-\varrho}{2}\right)^2} \\ &\le D(g) + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}\int \frac{|f(e^{i\vartheta})|^2 ds(\varphi)\, d\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta-\varphi}{2}} + \\ &\quad + \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta \int\limits_{|\varphi-\vartheta|<\varepsilon} \frac{ds_n(\varphi)}{\sin^2\frac{\vartheta-\varphi}{2} + \frac{1}{16n^2}}. \end{aligned}$$

By the definition of $\hat{m}_j$

$$\int\limits_{|\varphi-\vartheta|<\varepsilon} \frac{ds_n(\varphi)}{\sin^2\frac{\vartheta-\varphi}{2} + \frac{1}{16n^2}} < \text{Const.} \int\limits_{|\varphi-\vartheta|<2\varepsilon} \frac{ds(\varphi)}{\sin^2\frac{\vartheta-\varphi}{2}}$$

and since (12) holds, the theorem is proved.

References

[1] BEURLING, A.: Ensembles exceptionnels. Acta Math. **72**, 1–13 (1940). – [2] CARLESON, L.: On the zeros of functions with bounded Dirichlet integrals. Math. Z. **56**, 289–295 (1952). – [3] DOUGLAS, J.: Solution of the problem of Plateau. Trans. Amer. Math. Soc. **33**, 263–321 (1931).

Mathematisches Institut der Universität Uppsala (Schweden)

(Eingegangen am 18. September 1959)